INTRODUZIONE

- esami: SOLO SCRITTO.

- Ricevimento: Lunedì 12-13, Giovedì 17-18, online su appuntamento

- e-mail: alessio.barbieri@unitus.it

ORARI: LUNEDÌ 9-12
MARTEDÌ 14-17
GIOVEDÌ 14-17

- TESTO: "Matematica per le Scienze", Bramanti, Confortola, Salsa, Zanichelli

CAPITOLO 0: INSIEMI E FUNZIONI

Insiemi e logica

Un insieme è una collezione di oggetti, detti elementi.
Per indicare un insieme si usano lettere maiuscole

$$A, B, X, Y, \dots,$$

mentre per indicare gli elementi si usano le lettere minuscole

$$a, b, x, y, \dots$$

Per indicare che un elemento x appartiene all'insieme A si scrive

$$\boxed{x \in A}.$$

Se invece voglio dire che x non appartiene ad A scrivo

$$\boxed{x \notin A}.$$

In generale, se conosco i suoi elementi, un insieme si indica così

$$A = \{1, 3, 5\}$$

cioè i suoi elementi vanno scritti entro parentesi graffe.
Questa è la scrittura standard per un insieme finito, cioè con un numero finito di elementi. Vedremo che per insiemi infiniti ci dovremo avvalere di una scrittura diversa.

Si noti che l'ordine in cui sono scritti gli elementi di un insieme è irrilevante:

$$\{1,3,5\} = \{1,5,3\} = \{3,5,1\}.$$

Inoltre, è irrilevante anche la "molteplicità" di un elemento, cioè quante volte appare:

$$\{1, 3, 5\} = \{1,1,1, 3,3,5\}.$$

Due insiemi sono uguali se hanno gli stessi elementi.

Consideriamo adesso gli insiemi $A=\{1,2\}$ e $B=\{1,2,3\}$.
Gli elementi di A appartengono anche a B (ma non viceversa, perché $3 \notin A$). In tal caso si dice che A è un sottoinsieme di B e si scrive in simboli

$$\boxed{A \subseteq B}.$$

In simboli logici $A \subseteq B$ si scrive nel seguente modo.

$$\boxed{\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B}$$

"per ogni x tale che x appartiene ad A, allora x appartiene a B"

$\forall$ = "per ogni" QUANTIFICATORE UNIVERSALE

$:$ = "tale che"

$\Rightarrow$ = "implica / allora / segue che"

Se poi avviene anche che $B \subseteq A$, allora $A=B$, perché in generale

$$A=B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

$\Leftrightarrow$ = "se e solo se", cioè $\Rightarrow$ vale sia da sinistra a destra che da destra a sinistra

$\wedge$ = "et", cioè E.

Nel nostro caso specifico, $A=\{1,2\}$ e $B=\{1,2,3\}$, cioè $A \neq B$.
Però $A \subseteq B$. Se sono certo che $A \subseteq B$ e che $A \neq B$, allora dico che A è strettamente contenuto in B e si scrive

$$\boxed{A \subsetneq B} \text{ oppure } \boxed{A \subset B}$$

In simboli logici, $A \subsetneq B$ quando

$$\boxed{(\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (\exists x \in B : x \notin A).}$$

"per ogni x tale che $x \in A$ allora $x \in B$ ed esiste $x \in B$ che non appartiene ad A"

$\exists$ = "esiste" QUANTIFICATORE ESISTENZIALE

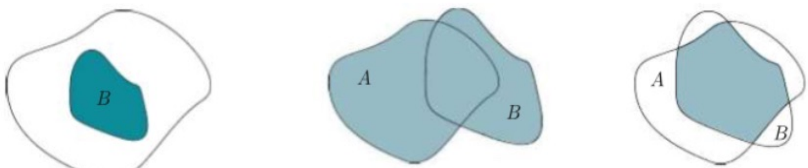
Altri simboli:

- $\exists!$ = "esiste ed è unico / esiste un unico"
- $\nexists$ = "non esiste"

L'insieme senza elementi è detto insieme vuoto e si indica con $\boxed{\emptyset}$.

Operazioni tra insiemi

Consideriamo due insiemi A e B. Le operazioni possibili tra A e B sono



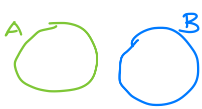
inclusione: $B \subsetneq A$ unione: $A \cup B$ intersezione: $A \cap B$

differenza: $A \setminus B$ complementazione: $\complement_U A$

- unione: $\boxed{A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}}$ $\vee$ = "vel" = oppure

- intersezione: $\boxed{A \cap B := \{x : x \in A \wedge x \in B\}}$

Due insiemi A e B tali che $A \cap B = \emptyset$ si dicono disgiunti.



$A = \{1, 2, 3\}$
$B = \{4, 5, 6\}$

- differenza: $\boxed{A \setminus B := \{x : x \in A \wedge x \notin B\}}$

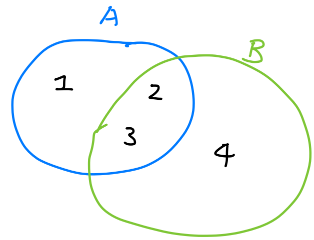
- complementazione: se $A \subseteq X$ (insieme universo) il complementare di A in X è

$$\boxed{C_X A := X \setminus A}$$

(spesso si usa il simbolo A^c quando X è sottointeso).

Esempio: consideriamo gli insiemi

$$A=\{1,2,3\} \quad e \quad B=\{2,3,4\}.$$



- $A\cup B=\{x: x\in A \vee x\in B\}$

$$=\{1,2,3,2,3,4\}=\{1,2,3,4\}$$

- $A\cap B=\{x: x\in A \wedge x\in B\}=\{2,3\}$
- $A\setminus B=\{x: x\in A \wedge x\notin B\}=\{1\}$
- $B\setminus A=\{x: x\in B \wedge x\notin A\}=\{4\}.$

Notate che unione e intersezione sono commutative, perché

$$A\cup B=B\cup A \quad , \quad A\cap B=B\cap A,$$

ma che la differenza non è commutativa, perché

$$A\setminus B \neq B\setminus A.$$

Prodotto cartesiano: è un'operazione che dati due insiemi A e B restituisce un'insieme di coppie ordinate (a,b) con $a\in A$ e $b\in B$.

COPPIE ORDINATE: $(a,b)\neq(b,a)$

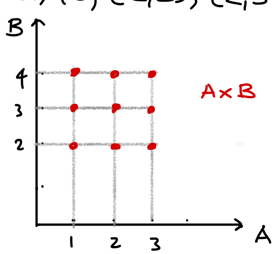
COPPIE NON ORDINATE: $(a,b)=(b,a)$

Tale operazione restituisce l'insieme

$$\boxed{A\times B:=\{(a,b): a\in A, b\in B\}}$$

Essendo le coppie ordinate, $A\times B\neq B\times A$, cioè il prodotto cartesiano non è commutativo. Se $A=\{1,2,3\}$ e $B=\{2,3,4\}$, allora

$$A\times B=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4)\}$$



Insiemi numerici

Ci sono alcuni insiemi notevoli che contengono numeri e che incontreremo nel corso. Tali insiemi sono gli insiemi numerici e sono tutti insiemi infiniti.

- insieme dei numeri naturali

$$\boxed{\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}}$$

- insieme dei numeri interi

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}}$$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

- insieme dei numeri razionali

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \cdot a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}}$$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Quest'ultimo contiene i numeri interi ma anche le frazioni di numeri interi. Come noto, le frazioni possono esprimere

- numeri decimali finiti $\left(\frac{3}{4} = 0{,}75 \right)$
- numeri decimali periodici $\left(\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} \right)$

ma non i numeri decimali infiniti non periodici, come

- $\pi = 3{,}14\dots$
- $e = 2{,}718\dots$ (numero di Nepero)
- $\varphi = 1{,}618\dots$ (sezione aurea)
- $\sqrt{p}$ con p numero primo.

numeri irrazionali

- insieme dei numeri reali

$$\boxed{\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{\text{numeri irrazionali}\}}$$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

- insieme dei numeri complessi

$$\boxed{\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}}$$

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

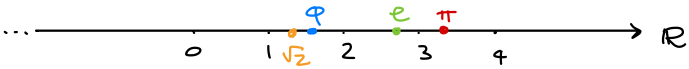
dove i è l'unità immaginaria, ossia un numero tale che

$$i^2 = -1.$$

I numeri reali

L'insieme di nostro interesse è quello dei numeri reali $\mathbb{R}$.
Per questo vale una proprietà importantissima, che per $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ non vale, cioè il cosiddetto

Assioma di completezza dei numeri reali: i numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con una retta, detta **retta reale**, vale a dire che
- a ogni numero reale corrisponde un punto della retta,
- a ogni punto della retta corrisponde un numero reale.



In sostanza possiamo volgarmente dire che l'insieme $\mathbb{R}$ "non ha buchi", così come la retta. Per $\mathbb{Q}$, ad esempio, questo non è vero perché i punti "colorati" sono punti che non appartengono a $\mathbb{Q}$.

Ne consegue anche **i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ possono essere punti, semirette o segmenti o unione di questi.**

Nella fattispecie, i tipi di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono:

- **intervalli limitati** ⤳ segmenti

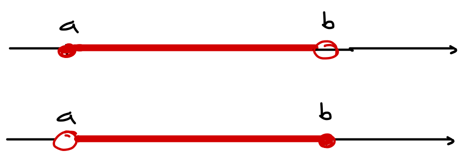
$$\boxed{[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}}$$

INTERVALLO <u>CHIUSO</u> E LIMITATO
↳ $a, b \in A$, cioè contiene gli estremi

$$\boxed{(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}}$$

INTERVALLO <u>APERTO</u> E LIMITATO
↳ $a, b \notin A$, cioè non contiene gli estremi

$$\boxed{\begin{array}{l} [a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\ (a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \end{array}}$$



INTERVALLI <u>SEMIAPERTI</u> LIMITATI
↳ solo uno dei due estremi è contenuto

Esempi. $[1,2] = \{x \in \mathbb{R}.\ 1 \leq x \leq 2\}$ è un intervallo chiuso e limitato

$(0,5] = \{x \in \mathbb{R}: 0 < x \leq 5\}$ è un intervallo semiaperto e limitato (aperto a sinistra e chiuso a destra)

- intervalli illimitati ⤳ semirette

$$\boxed{[a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R}: x \geq a\}}$$

↳ SEMIRETTA DESTRA CHIUSA

↳ $a \in [a,+\infty)$

$$\boxed{(a,+\infty) := \{x \in \mathbb{R}: x > a\}}$$

↳ SEMIRETTA DESTRA APERTA

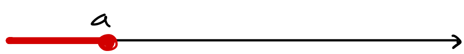
↳ $a \notin (a,+\infty)$

N.B: 1) $+\infty$ NON è un numero reale, quindi non si scrive MAI $[a,+\infty]$.

2) comunemente si scrivono

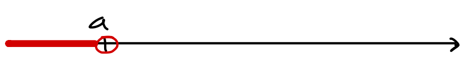
$$\boxed{\mathbb{R}^+_0 := [0,+\infty) \quad e \quad \mathbb{R}^+ := (0,+\infty)}$$

$$\boxed{(-\infty,a] := \{x \in \mathbb{R}: x \leq a\}}$$



↳ SEMIRETTA SINISTRA CHIUSA

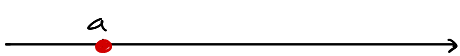
$$\boxed{(-\infty,a) := \{x \in \mathbb{R}: x < a\}}$$



↳ SEMIRETTA SINISTRA APERTA

- singoletti, cioè insiemi costituiti da un solo punto ⤳ punto

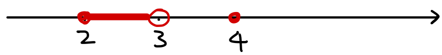
$\{a\}$



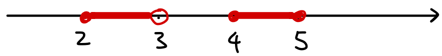
- unione di intervalli e/o singoletti

Esempi:

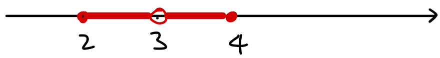
- $[2,3) \cup \{4\}$



- $[2,3) \cup [4,5]$

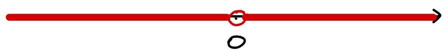


- $[2,3) \cup (3,4]$



(si può scrivere anche come $[2,4] \setminus \{3\}$)

- $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



(si può scrivere anche come $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$).

Per i sottoinsiemi dei numeri reali possiamo dare le seguenti definizioni:

Def: sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ è un maggiorante per A se

$$x_0 \geq a \quad \forall a \in A.$$

Invece, $x_0 \in \mathbb{R}$ è un minorante per A se $x_0 \leq a \quad \forall a \in A$.

un insieme può avere anche infiniti maggioranti e minoranti!

Esempi:

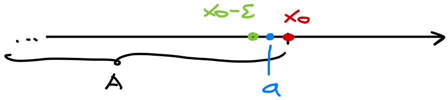
- $A = [2,5]$. Qualsiasi numero $x_0 \geq 5$ è un maggiorante per A. Analogamente, ogni numero $x_0 \leq 2$ è un minorante per A.
- $A = (2,+\infty)$. Ogni $x_0 \leq 2$ è un minorante per A. Tuttavia, A non ha maggioranti!
- $\mathbb{R} = (-\infty,+\infty)$ non ha né maggioranti, né minoranti.
- $A = \{2\}$. Ogni $x_0 \geq 2$ è maggiorante e ogni $x_0 \leq 2$ è minorante. In particolare, 2 è sia maggiorante che minorante.
- $A = (-2,3] \cup [4,7]$. Ogni $x_0 \geq 7$ è maggiorante e ogni $x_0 \leq -2$ è minorante.

Def: siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Diremo che

- $x_0 \in \mathbb{R}$ è l'**estremo superiore** di A (e scriviamo $x_0 = \sup A$) se sono soddisfatte queste due proprietà:

  1) x_0 è un maggiorante per A,

  2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists a \in A : x_0 - \varepsilon < a$. ← significa che se rimpicciolisco x_0 di ε, qualunque sia ε, $x_0 - \varepsilon$ NON è più maggiorante

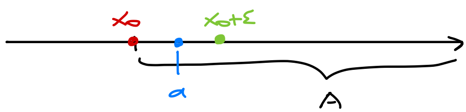
  ||

  IL SUP È IL PIÙ PICCOLO DEI MAGGIORANTI

- $x_0 \in \mathbb{R}$ è l'**estremo inferiore** di A (e scriviamo $x_0 = \inf A$) se sono soddisfatte queste due proprietà:

  1) x_0 è un minorante per A,

  2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists a \in A : x_0 + \varepsilon > a$ = **L'INF È IL PIÙ GRANDE DEI MINORANTI**

Esempi:

- $A = [2,5]$: il più piccolo dei maggioranti è 5, mentre il più grande dei minoranti è 2, quindi

  $$\sup A = 5 \quad , \quad \inf A = 2.$$

- $A = (2,5)$: il più piccolo dei maggioranti è 5, mentre il più grande dei minoranti è 2, quindi

  $$\sup A = 5 \quad , \quad \inf A = 2.$$

- $A = (2, +\infty)$: sicuramente $\inf A = 2$. Non avendo A maggioranti,

  $$\nexists \sup A.$$

  In questo caso, per convenzione (ma con abuso di notazione) si scrive che

  $$\sup A = +\infty.$$

□ $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$: $\nexists \inf \mathbb{R}$ e $\nexists \sup \mathbb{R}$. Per convenzione si scrive

$$\inf \mathbb{R} = -\infty \quad e \quad \sup \mathbb{R} = +\infty.$$

Per un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice che

- è **limitato** se $\exists \inf A$, $\exists \sup A$ (vedi $[2,5]$, $(2,5)$)
- è **illimitato superiormente** se $\nexists \sup A$ (vedi $(2,+\infty)$)
- è **illimitato inferiormente** se $\nexists \inf A$ (vedi $(-\infty,3]$)
- è **illimitato** se illimitato inferiormente oppure superiormente.

Def: sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora:

- se $x_0 = \sup A \in A$, allora x_0 è il **massimo** di A e si scrive $x_0 = \max A$,
- se $x_0 = \inf A \in A$, allora x_0 è il **minimo** di A e si scrive $x_0 = \min A$.

Esempi:

□ $A = [2,5]$. Sappiamo che $\inf A = 2$ e $\sup A = 5$. Poiché $2 \in A$ e $5 \in A$,

$$2 = \min A \quad e \quad 5 = \max A.$$

□ $A = [2,5)$. Si ha che $\inf A = 2$ con $2 \in A$, quindi $2 = \min A$.
Invece, $\sup A = 5$ ma $5 \notin A$, dunque $\nexists \max A$.

□ $A = (2,5)$, allora $\nexists \min A$ e $\nexists \max A$.