# Teorema di De L'Hôpital

Siano $f, g: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I'$.

Se

(1) $f, g$ sono derivabili in $I \setminus \{x_0\}$ con $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I \setminus \{x_0\}$,

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ è una F.I. $\dfrac{0}{0}$ oppure $\dfrac{\infty}{\infty}$,

(3) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$,

allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

In sostanza, posso sciogliere una F.I. $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$ calcolando il limite del rapporto delle derivate.

Esempi:

1) Calcoliamo $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x + \ln(x)}{2x+1} = \dfrac{+\infty + \infty}{+\infty + 1} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ F.I.

Questo limite lo sappiamo già risolvere con la gerarchia degli infiniti. In alternativa usiamo il Teorema di De L'Hôpital:

$(3x + \ln(x))' = 3 + \dfrac{1}{x}$ ; $(2x+1)' = 2$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x + \ln(x)}{2x+1} \overset{H.}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{2} = \frac{3 + \frac{1}{+\infty}}{2} = \frac{3+0}{2} = \boxed{\frac{3}{2}}.$$

scrivo H. quando applico De L'Hôpital

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \dfrac{\sin(0)}{0} = \dfrac{0}{0}$ F.I.

uso De L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} \overset{H.}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \lim_{x \to 0} \cos(x) = \cos(0) = \boxed{1}.$$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1-\cos(0)}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ F.I.

$\longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \overset{H.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{0-(-\sin(x))}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} \quad \frac{0}{0}$ F.I.

Riapplico De L'Hôpital una seconda volta:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} \overset{H.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x} \overset{H.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{\cos(0)}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+0)}{0} = \frac{\ln(1)}{0} = \frac{0}{0}$ F.I.

$\longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{H.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+0} = \boxed{1}.$

$(\ln(1+x))' = \frac{1}{1+x} \cdot (1+x)' = \frac{1}{1+x} \cdot 1 = \frac{1}{1+x}$

funzione composta

5) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \frac{e^0-1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$ F.I.

$\longrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} \overset{H.}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-0}{1} = \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = \boxed{1}.$

6) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^3} = \frac{\infty}{\infty}$ F.I.

$\longrightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+3x+1}{x^3} \overset{H.}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{2x+3}{3x^2} \quad \frac{\infty}{\infty}$ F.I.

$\overset{H.}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{2}{6x} = \frac{2}{6\cdot(+\infty)} = \frac{2}{+\infty} = \boxed{0}.$

Il Teorema di De L'Hôpital ci permette di determinare le derivate destra e sinistra in un punto senza calcolare il rapporto incrementale.

Ricordiamo che per $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $x_0 \in \mathring{I}$

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

e che $f$ derivabile in $x_0 \iff f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$ FINITE.

Se $f$ è derivabile in $I \setminus \{x_0\}$, allora usando il Teorema di De L'Hôpital,

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \overset{H.}{=} \lim_{h\to 0^+} \frac{f'(x_0+h) - 0}{1}$$

nella variabile $h$

$$= \lim_{h\to 0^+} f'(x_0+h)$$

$$f'(x_0+h) = f'(x_0+h) \cdot (x_0+h)' = f'(x_0+h) \cdot 1$$

Facciamo un cambiamento di variabile e chiamiamo

$$\boxed{x = x_0 + h}.$$

Se $h \to 0^+$, allora $x = x_0 + h \xrightarrow[h\to 0^+]{} x_0^+$, cioè $x \to x_0^+$.

Quindi

$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \overset{H.}{=} \lim_{h\to 0^+} f'(x_0+h) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x),$$

cioè la derivata destra in $x_0$ si ottiene come limite per $x \to x_0^+$ della derivata $f'(x)$.

In modo del tutto analogo,

$$f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} f'(x).$$

Riassumendo,

**Corollario**

Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $I$ e derivabile in $I \setminus \{x_0\}$, dove $x_0 \in \mathring{I}$, allora

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x) \quad \text{e} \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x).$$

In particolare,

$$f \text{ derivabile in } x_0 \iff \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x) \text{ FINITI.}$$

In questo modo possiamo estendere il concetto di derivabilità anche a punti NON interni. Ad esempio, per $I = [a,b]$, una funzione $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice **derivabile in $[a,b]$** se

1. $f$ è derivabile in $(a,b)$, $\leftarrow$ già so cosa vuol dire: derivabile in $x_0$ $\forall x_0 \in (a,b)$

2. $\lim_{x \to a^+} f'(x)$ e $\lim_{x \to b^-} f'(x)$ esistono FINITI.

**Esercizio 1** Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2 - b}{x-2}, & \text{se } x \leq 1 \\ 2\ln(x) + 1, & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

determinare i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ per cui $f$ risulta continua e derivabile in $\mathbb{R}$.

La funzione $f$ è definita a tratti:

- per $x \leq 1$ è una razionale fratta, che è definita in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ ($x=2$ annulla il denominatore), continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
  Quindi se $x < 1$, $f$ è sicuramente continua e derivabile;
- per $x > 1$ è un logaritmo, definito per $x > 0$ e nel suo dominio continuo e derivabile.
  Quindi se $x > 1$, $f$ è continua e derivabile.

$\Longrightarrow$ $f$ continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Rimane da studiare continuità e derivabilità nel punto di stacco, cioè $x_0 = 1$.

**Continuità in $x_0 = 1$**: $f$ continua in $x_0 = 1 \iff \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$.

$$f(1) = \frac{a(1)^2 - b}{1-2} = \frac{a-b}{-1} = -a+b$$

$$= \lim_{x \to 1^-} f(x).$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \to 1} (2\ln(x) + 1) = 2\ln(1) + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

Dunque,

$$f \text{ continua in } x_0 = 1 \iff \boxed{-a+b = 1}$$

è un'equazione in 2 incognite: non so risolverla, a meno che io non abbia una seconda equazione

**Derivabilità in $x_0=1$:** bisogna calcolare la derivata di $f$ nelle singole leggi di definizione:

- per $x<1$, $f(x)=\dfrac{ax^2-b}{x-2}$. Quindi,

$$f'(x)=\frac{(ax^2-b)'\cdot(x-2)-(ax^2-b)\cdot(x-2)'}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{2ax\cdot(x-2)-(ax^2-b)\cdot 1}{(x-2)^2}$$

togo la parentesi: il $-$ davanti cambia tutti i segni

$$=\frac{2ax\cdot(x-2)-(ax^2-b)}{(x-2)^2}=\frac{2ax^2-4ax-ax^2+b}{(x-2)^2}$$

$$=\frac{ax^2-4ax+b}{(x-2)^2}.$$

- per $x>1$, $f(x)=2\ln(x)+1 \longrightarrow f'(x)=\dfrac{2}{x}$.

Allora

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{ax^2-4ax+b}{(x-2)^2}, & \text{se } x<1\\[2mm] \dfrac{2}{x}, & \text{se } x>1\end{cases}$$

$\leftarrow$ IL CASO $x=1$ NON C'È PERCHÉ NON SO SE $f$ DERIVABILE IN $x=1$

Dunque $f$ derivabile in $x_0=1$ se e solo se

$$\lim_{x\to1^+}f'(x)=\lim_{x\to1^-}f'(x) \quad \text{e sono finiti.}$$

Calcoliamoli:

$$\lim_{x\to1^+}f'(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}f'(x)=\lim_{x\to1}\frac{2}{x}=\frac{2}{1}=2.$$

$$\lim_{x\to1^-}f'(x)=\lim_{\substack{x\to1\\x<1}}f'(x)=\lim_{x\to1}\frac{ax^2-4ax+b}{(x-2)^2}=\frac{a-4a+b}{(-1)^2}$$

$$=\frac{-3a+b}{1}=-3a+b$$

Quindi $f$ derivabile in $x_0=1 \iff \boxed{-3a+b=2}$

Quindi per trovare i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ per cui $f$ è continua e derivabile in $x_0 = 1$ bisogna risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} -a+b=1 \\ -3a+b=2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} b=1+a \\ -3a+b=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=1+a \\ -3a+(1+a)=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=1+a \\ -3a+a=2-1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} b=1+a \\ \frac{-2a}{-2}=\frac{1}{-2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=1+a \\ a=-\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=1-\frac{1}{2} \\ a=-\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b=\frac{1}{2} \\ a=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

Perciò $f$ è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ se e solo se

$$\boxed{a=-\frac{1}{2}, \quad b=\frac{1}{2}}$$

## DERIVATA SECONDA

Consideriamo la funzione $f(x) = x^2+3x$. Essendo un polinomio è derivabile in $\mathbb{R}$ e la sua derivata è

$$f'(x) = 2x+3.$$

Ma anche $f'$ è un polinomio, quindi derivabile in $\mathbb{R}$ con derivata $y=2$.

La derivata di $f'$ si chiama derivata seconda di $f$ e si indica con

$$f''(x).$$

Nell'esempio, $f(x) = x^2+3x \rightarrow f'(x) = 2x+3 \rightarrow f''(x) = 2.$

Analogamente, esistono la derivata terza ($f'''(x)$), la derivata quarta ($f^{(IV)}(x)$), ecc...

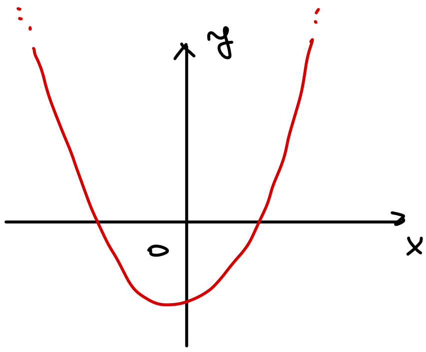
La derivata seconda dà informazioni sulla concavità del grafico di $f$:

- se $f''(x)>0$ in $J \subseteq I$, allora $f$ è convessa in $J$
- se $f''(x)<0$ in $J \subseteq I$, allora $f$ è concava in $J$

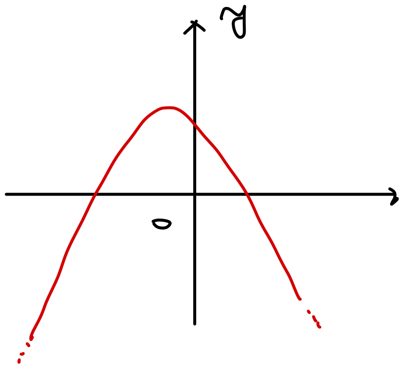
Inoltre, se $f$ cambia concavità in un punto $x = x_0$, allora $x_0$ è un punto di flesso per $f$.

Se $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte in $x_0 \in \mathring{I}$, allora

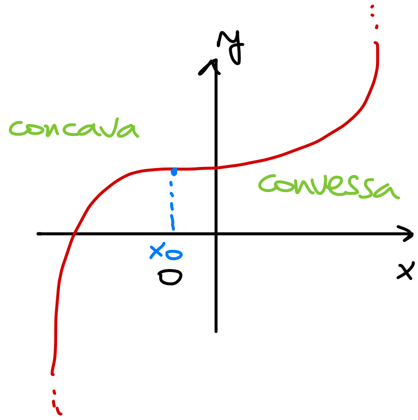
$$x = x_0 \text{ punto di flesso} \Longrightarrow f''(x_0) = 0 .$$




FUNZIONE CONVESSA




FUNZIONE CONCAVA




$x = x_0$ PUNTO DI FLESSO

**Esercizio 1** Data la funzione

$$f(x)=\frac{x^2-x+9}{x}$$

determinarne: dominio, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, eventuali asintoti, massimi e minimi relativi.

**① DOMINIO:** essendo f una razionale fratta, Dominio : DENOM. $\neq 0$, cioè $x \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{D=\mathbb{R}\setminus\{0\}}$$

**② SIMMETRIE:**

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-(-x)+9}{-x}=\frac{x^2+x+9}{-x}$$

$$=-\frac{x^2+x+9}{x}\neq f(x), -f(x)$$

$\Rightarrow$ f né pari, né dispari

**③ INTERSEZIONE ASSI:**

- asse y (equazione $x=0$): $0 \notin D \Rightarrow$ nessuna intersezione con l'asse y
- asse x ($y=0$): risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y=0 \\ y=\dfrac{x^2-x+9}{x}\end{cases} \rightarrow \cancel{x}\cdot\frac{x^2-x+9}{\cancel{x}}=\overset{0}{\overbrace{0\cdot x}} \rightarrow x^2-x+9=0$$

$$\Delta=(-1)^2-4\cdot1\cdot9=1-36=-35<0$$

l'equazione non ha soluzioni reali

$\Rightarrow$ nessuna intersezione con l'asse x.

**④ SEGNO:** risolviamo $f(x)>0$.

$$\frac{x^2-x+9}{x}>0$$

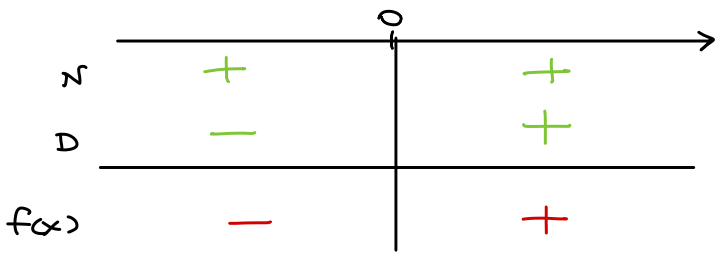
N: $x^2-x+9>0$ Poiché il trinomio ha $\Delta<0$, la disequazione è vera $\forall x\in\mathbb{R}$

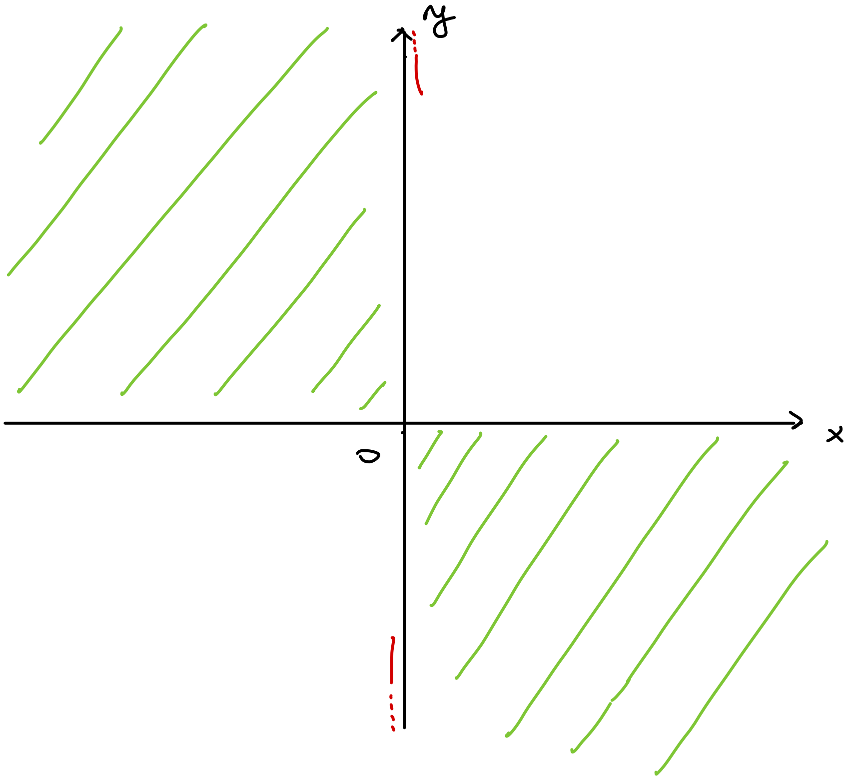
Ricordare:
$$\boxed{\left.\begin{matrix} \overset{0}{a}x^2+bx+c>0 \\ \Delta<0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}}$$

D: $x>0$

Traccio la linea dei segni:

- $f(x) > 0$ se $x > 0$,
- $f(x) < 0$ se $x < 0$.




## (5) ASINTOTI:

☐ VERTICALI: visto che $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, l'unico candidato asintoto verticale è $x = 0$. Allora calcoliamo

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - x + 9}{x} = \frac{0 - 0 + 9}{0^+} = \frac{9}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - x + 9}{x} = \frac{0 - 0 + 9}{0^-} = \frac{9}{0^-} = -\infty$$

$\Longrightarrow x = 0$ asintoto verticale

☐ ORIZZONTALI:

- $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x + 9}{x} = \dfrac{+\infty - \infty}{+\infty}$ F.I.

La possiamo risolvere con
- raccoglimento forzato
- De L'Hôpital

Con il raccoglimento forzato,

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\cancel{2}}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{9}{x^2}\right)}{\cancel{x}} = +\infty(1 - 0 + 0) = +\infty$$

$\Longrightarrow$ non ci sono asintoti orizzontali per $x \to +\infty$.

- $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+9}{x} = \frac{+\infty}{-\infty}$ F.I.

La possiamo sciogliere con
- raccoglimento forzato
- De L'Hôpital

con il raccoglimento forzato,

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}{\cancel{x}} = -\infty\cdot(1-0+0) = -\infty$$

$\Rightarrow$ non ci sono asintoti orizzontali per $x\to-\infty$.

D OBLIQUI:

- Per $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2-x+9}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+9}{x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+9}{x^2} = \frac{+\infty-\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{9}{x^2}\right) = 1-0+0 = \boxed{1 =: m}$$

Ora calcolo

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-x+9}{x}-x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}-x+9-\cancel{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x+9}{x} \qquad \frac{-\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(-1+\frac{9}{x}\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{9}{x}\right) = -1+0 = \boxed{-1 =: q}$$

$\Rightarrow$ $y = x-1$ asintoto obliquo per $f$ se $x\to+\infty$.

- Per $x\to-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+9}{x^2} \qquad \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

Per variare stavolta usiamo De L'Hôpital:

$$\overset{H.}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{2x} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \overset{H.}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} = \lim_{x\to-\infty} 1 = \boxed{1 =: m}$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-x+9}{x}-x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x+9}{x} \quad \frac{+\infty}{-\infty} \text{ F.I.}$$

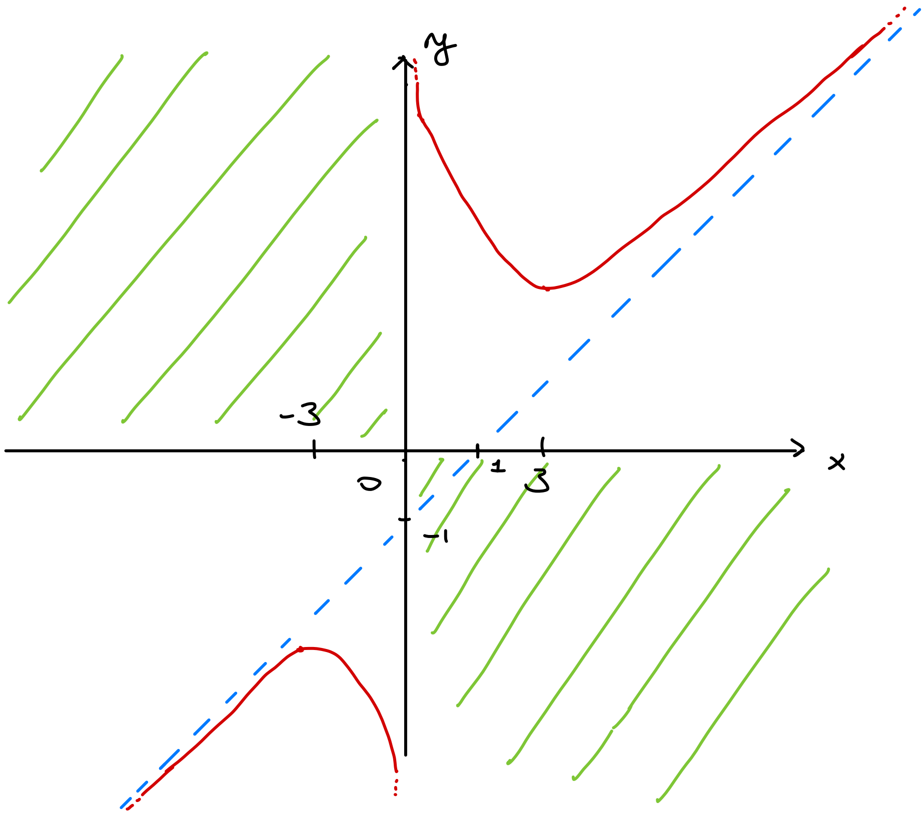
$$\underset{H.}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{1} = \lim_{x\to-\infty}(-1) = \boxed{-1 =: q}$$

$\Rightarrow$ $y = x-1$ è asintoto obliquo anche per $x \to -\infty$.

Ricordo che per disegnare una retta basta conoscerne due punti. Uno è sempre dato dalla quota perché è $(0, q)$. Il secondo lo troviamo a caso.

$y = x-1 \longrightarrow (0,-1)$ punto della retta

$\searrow$ $y=0 \to x-1=0 \to x=1 \to (1,0)$ punto della retta




**6 MASSIMI E MINIMI:** calcoliamo $f'(x)$.

$$f(x) = \frac{x^2-x+9}{x} \longrightarrow f'(x) = \frac{(2x-1)\cdot x - (x^2-x+9)\cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2-x-(x^2-x+9)}{x^2} = \frac{2x^2\cancel{-x}-x^2\cancel{+x}-9}{x^2} = \frac{x^2-9}{x^2}$$

Determiniamo i punti critici di $f$:

$$f'(x)=0 \rightarrow \cancel{x^2}\cdot\frac{x^2-9}{\cancel{x^2}} = \underbrace{0\cdot x^2}_{=0} \rightarrow x^2-9=0 \rightarrow x^2=9$$

$\rightarrow x=-3 \vee x=3$ punti critici di $f$.

Classifichiamo ora i punti critici risolvendo la disequazione

$$f'(x)>0$$

$$\rightarrow \frac{x^2-9}{x^2}>0$$

N: $x^2-9>0 \rightarrow x^2>9 \rightarrow x<-3 \vee x>3$

D: $x^2>0 \quad \forall x\neq 0$

| | | $-3$ | | $0$ | | $3$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| N | $+$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| D | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| | $+$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ |

Allora:

- $f'(x)>0$ se $x<-3 \vee x>3$
  $\Rightarrow f$ crescente se $x<-3 \vee x>3$

- $f'(x)<0$ se $-3<x<0 \vee 0<x<3$
  $\Rightarrow f$ decrescente se $-3<x<0 \vee 0<x<3$

Quindi:

- in $x=-3$ $f$ passa da essere crescente a essere decrescente
  $\Rightarrow x=-3$ punto di massimo relativo

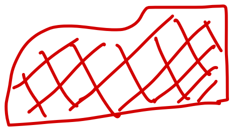
- $x=3$ $f$ passa da essere decrescente a essere crescente
  $\Rightarrow x=3$ punto di minimo relativo.

## CAPITOLO 4: GLI INTEGRALI

Gli integrali si introducono al fine di rispondere a due domande:

① A partire da una funzione $f$ sappiamo determinare la derivata $f'$. Invece, conoscendo $f'$ possiamo risalire a $f$?

② Come si determina l'area di una figura a contorno mistilineo?



In questo capitolo risponderemo a entrambe le domande:

① $\longrightarrow$ INTEGRALI INDEFINITI

② $\longrightarrow$ INTEGRALI DEFINITI

### INTEGRALE INDEFINITO

**Def**: sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Una funzione $F: I \longrightarrow \mathbb{R}$ è una primitiva per $f$ in $I$ se

(1) $F$ è derivabile in $I$,

(2) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$.

**Osservazione**: le primitive di una funzione, se esistono, sono INFINITE e differiscono tutte per una costante additiva $c \in \mathbb{R}$.

Esempio: consideriamo $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = 3x^2$.
Sicuramente una primitiva di $f$ in $\mathbb{R}$ è $y = x^3$ perché

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Tuttavia, anche $y = x^3 + 1$ è una primitiva di $f$ in $\mathbb{R}$ perché $(x^3+1)' = 3x^2$. Analogamente, anche $y = x^3 + 415$ è una primitiva di $f$ in $\mathbb{R}$, perché

$$(x^3 + 415)' = 3x^2.$$

In sostanza, se $F$ è una primitiva di $f$ in $I$, l'insieme di TUTTE le primitive di $f$ in $I$ è dato da

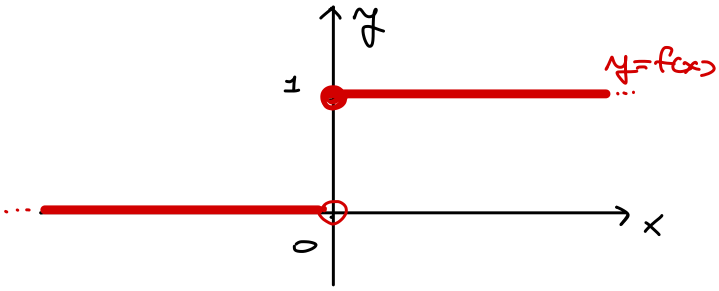
$$\boxed{\{F(x) + c : c \in \mathbb{R}\}}$$

Non tutte le funzioni ammettono primitive.

Esempio (funzione che non ammette primitive):

Consideriamo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ detta "gradino di Heaviside"

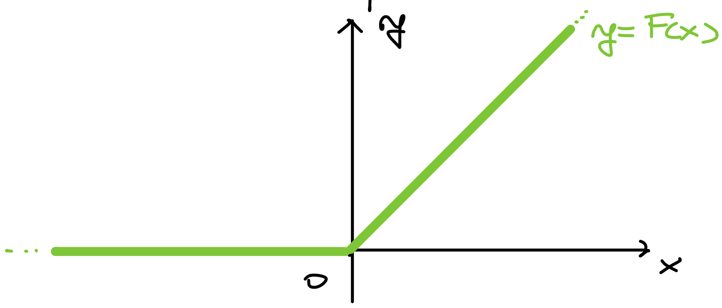
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$




Questa funzione non ammette primitive negli intervalli $I$ contenenti $x_0 = 0$.

Per esempio, prendiamo $I = \mathbb{R}$. Se $f$ ammettesse primitiva, a meno di $+c$, questa sarebbe

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$




perché $(x)' = 1$ e $(0)' = 0$.

Tuttavia, $F$ non può essere una primitiva perché non è derivabile in $x_0 = 0$. Infatti:

$$F'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} F'(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \to 0} 1 = 1,$$

$$F'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} F'(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \to 0} (-1) = -1,$$

cioè $F'_+(0) = 1 \neq -1 = F'_-(0) \Rightarrow F$ NON derivabile in $x_0 = 0$ (punto angoloso)

Riassumendo, $f$ non ammette primitiva in $I$ se $0 \in I$ perché le candidate primitive non sono derivabili.

(una primitiva deve SEMPRE essere derivabile)

**Def:** sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione che ammette primitive. chiamiamo integrale indefinito di $f$, e lo indichiamo con

$$\int f(x)\,dx,$$

l'insieme di TUTTE le primitive di $f$ in $I$.
Se $F: I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di $f$ in $I$, allora si scrive

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + c}.$$

Ad esempio, per $f(x) = 3x^2$ si ha che

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + c.$$

"differenziale"

## Integrali di funzioni elementari

L'integrale indefinito è l'operazione inversa della derivata.
Quindi:

- $\int k\,dx = kx + c$ perché $(kx+c)' = k$,
- $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$ perché $\left(\frac{x^2}{2}+c\right)' = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x = x$
- $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$ perché $\left(\frac{x^3}{3} + c\right)' = \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}x^2 = x^2$
- in generale, per $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq -1$, vale la formula

$$\boxed{\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c}$$

($\alpha \neq -1$ perché altrimenti il denominatore è 0)

Infatti,

$$\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c\right)' = \frac{1}{\cancel{\alpha+1}} \cancel{(\alpha+1)} \cdot x^{\alpha+1-1} = x^\alpha.$$

- se $\alpha = -1$, allora $x^\alpha = x^{-1} = \frac{1}{x}$ e si ha che

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c}$$

Perché il modulo? Ricordiamo che $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$,

quindi

$$\ln|x| = \begin{cases} \ln(x), & \text{se } x > 0 \\ \ln(-x), & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(in $x=0$ non è definito il logaritmo)

(se $x<0 \to -x>0 \to$ posso definire $\ln(-x)$)

Allora

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ mentre $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = -\frac{1}{x} \cdot (-1) = +\frac{1}{x}$.

FUNZIONE COMPOSTA

$\left.\begin{array}{l} f(x) = \ln(x) \\ g(x) = -x \end{array}\right\} (f \circ g)(x) = \ln(-x)$

- $\int a^x\, dx = \frac{1}{\ln(a)} \cdot a^x + c$.

se in particolare $a = e$, allora $\ln(e) = 1$ e quindi

$$\int e^x\, dx = e^x + c.$$

- $\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + c$, perché $(-\cos(x))' = -(\cos(x))'$
$= -(-\sin(x)) = +\sin(x)$

- $\int \cos(x)\, dx = \sin(x) + c$.

- $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = tg(x) + c$ perché $(tg(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

- $\int \frac{1}{x^2+1}\, dx = arctg(x) + c$ perché $(arctg(x))' = \frac{1}{x^2+1}$.

## Proprietà dell'integrale

(1) $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

(2) $\int k \cdot f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx \qquad (k \in \mathbb{R})$

**Esercizio 1** Calcolare il seguente integrale

$$\int (x^3 + 2x^2 + \sqrt{x} + 2)\,dx$$

$\sqrt{x} = x^{1/2}$

$$\underset{(1)}{=} \int x^3 dx + \int 2x^2 dx + \int \sqrt{x}\,dx + \int 2\,dx$$

$$\underset{(2)}{=} \int x^3 dx + 2\int x^2 dx + \int \sqrt{x}\,dx + 2\int dx$$

$\int dx = \int 1 \cdot dx = 1 \cdot x + c = x + c$

$$= \int x^3 dx + 2\int x^2 dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx + 2\int dx$$

$$= \frac{x^{3+1}}{3+1} + 2\,\frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + 2x + c$$

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2x + c$$

$\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$$= \boxed{\frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{3/2} + 2x + c}$$

$\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} = x^{3/2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x^{3/2}$

**Esercizio 2** Calcolare il seguente integrale

$$\int \left( \frac{2}{x^3} - \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$\overset{(1)}{=} \int \frac{2}{x^3} dx - \int \sqrt[3]{x}\, dx - \int \frac{1}{x} dx$$

$$\overset{(2)}{=} 2 \int \frac{1}{x^3} dx - \int \sqrt[3]{x}\, dx - \int \frac{1}{x} dx$$

$$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$$
$$\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$$

$$= 2 \int x^{-3} dx - \int x^{\frac{1}{3}} dx - \int \frac{1}{x} dx$$

$$= 2 \frac{x^{-3+1}}{-3+1} - \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} - \ln|x| + c$$

$$\frac{1}{3} + 1 = \frac{1+3}{3} = \frac{4}{3}$$

$$= \cancel{2} \cdot \frac{x^{-2}}{-\cancel{2}} - \frac{x^{4/3}}{\frac{4}{3}} - \ln|x| + c$$

$$= - x^{-2} - \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} - \ln|x| + c$$

$$x^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x} = x \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$= \boxed{- \frac{1}{x^2} - \frac{3}{4} x \cdot \sqrt[3]{x} - \ln|x| + c}$$

**Esercizio 3** Calcolare il seguente integrale

$$\int \left( - \frac{2}{x^3} + \frac{\sin(x) - \cos(x)}{3} + 5 e^x \right) dx$$

$$= \int \left( - \frac{2}{x^3} + \frac{\sin(x)}{3} - \frac{\cos(x)}{3} + 5 e^x \right) dx$$

$$= \int - \frac{2}{x^3} dx + \int \frac{\sin(x)}{3} dx - \int \frac{\cos(x)}{3} dx + \int 5 e^x dx$$

$$= -2 \int x^{-3} dx + \frac{1}{3} \int \sin(x) dx - \frac{1}{3} \int \cos(x) dx + 5 \int e^x dx$$

$$= -2 \cdot \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + \frac{1}{3} (-\cos(x)) - \frac{1}{3} \sin(x) + 5 e^x + c$$

$$= -\cancel{2} \frac{x^{-2}}{-\cancel{2}} - \frac{1}{3} \cos(x) - \frac{1}{3} \sin(x) + 5 e^x + c$$

$$= \boxed{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} \cos(x) - \frac{1}{3} \sin(x) + 5 e^x + c}$$

**Esercizio 4** Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{x^2+4x+1}{2x}\,dx$$

$$= \int\left(\frac{x^{\cancel{2}}}{2\cancel{x}} + \frac{\cancel{4}^{\,2}\cancel{x}}{\cancel{2x}} + \frac{1}{2x}\right)dx = \int\left(\frac{x}{2}+2+\frac{1}{2x}\right)dx$$

$$= \int \frac{x}{2}\,dx + \int 2\,dx + \int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int x\,dx + 2\int dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{1}{2}\ln|x| + c = \boxed{\frac{x^2}{4} + 2x + \frac{1}{2}\ln|x| + c}$$

**Esercizio 5** Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$$

**N.B:** una frazione si può spezzare solo a numeratore, MAI a denominatore!

$$\frac{x^2+1}{x^2} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2} \quad ✓$$

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2}{x^2} + \frac{x^2}{1} \quad ✗ \qquad \text{SBAGLIATISSIMO !}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int\left(\cancel{\frac{x^2+1}{x^2+1}} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \qquad \int\frac{1}{x^2+1} = \operatorname{arctg}(x) + c$$

$$= \boxed{x - \operatorname{arctg}(x) + c}$$

$$\int \frac{x^2}{x^2+4}\,dx = \int \frac{x^2+4-4}{x^2+4}\,dx$$

# Integrazione per parti

Contrariamente alle derivate, gli integrali non hanno una formula generale per il prodotto (e neanche per il rapporto).
In molti casi, però, l'integrale di un prodotto si può risolvere tramite integrazione per parti.

Ricaviamoci la formula partendo da quella per la derivata del prodotto:

$$\left(f(x)\cdot g(x)\right)' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x).$$

Integriamo ambo i membri:

$$\int \left(f(x)\cdot g(x)\right)' dx = \int f'(x) g(x)\, dx + \int f(x) g'(x)\, dx \qquad (1)$$

Ricordiamo che l'integrale indefinito è l'operazione inversa della derivata, cioè

$$\int \left(f(x)\cdot g(x)\right)' dx = f(x)\cdot g(x).$$

Perciò l'uguaglianza (1) diventa

$$f(x) g(x) = \int f'(x) g(x)\, dx + \int f(x) g'(x)\, dx$$

$$\rightarrow f(x) g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx = \int f(x) g'(x)\, dx$$

Leggendo l'uguaglianza al contrario abbiamo

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)\, dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x) g(x)\, dx}$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

**Esercizio 1** Calcolare il seguente integrale

$$\int x \cdot e^x \, dx$$

Per applicare la formula di integrazione per parti devo assegnare il ruolo di $f$ e il ruolo di $g'$

$$\boxed{\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) g(x) \, dx}$$

La $f$ andrà derivata, mentre la $g'$ integrata. Quindi:

- $g'$ dovrà essere una funzione che so integrare,
- $f$ dovrà essere una funzione che, se derivata, mi rende il secondo integrale più semplice.

Nel nostro caso scegliamo

$$f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1$$
$$g'(x) = e^x \longrightarrow g(x) = e^x$$

Quindi

lo so risolvere!

$$\int \underbrace{x}_{f} \, \underbrace{e^x}_{g'} \, dx = \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{e^x} - \int \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{e^x} \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = \boxed{x e^x - e^x + c}$$

**Esercizio 2** Calcolare il seguente integrale

$$\int \underbrace{x}_{f} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'} \, dx$$

$$f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1$$
$$g'(x) = \cos(x) \rightarrow g(x) = \sin(x)$$

$$= \underset{f}{x} \cdot \underset{g}{\sin(x)} - \int \underset{f'}{1} \cdot \underset{g}{\sin(x)} \, dx = x \sin(x) - \int \sin(x) \, dx$$

$$= x \sin(x) - (-\cos(x)) + c = \boxed{x \sin(x) + \cos(x) + c}$$

**Esercizio 3** Calcolare il seguente integrale

$$\int \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'} \, dx$$

$f(x) = x^2 \longrightarrow f'(x) = 2x$

$g'(x) = \sin(x)$

$\longrightarrow g(x) = -\cos(x)$

$$= \underbrace{x^2}_{f} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g} - \int \underbrace{2x}_{f'} \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g} \, dx$$

INTEGRAZIONE PER PARTI RIPETUTA

$$= -x^2 \cos(x) + 2 \underbrace{\int x \cdot \cos(x) \, dx}_{\text{è l'integrale dell'Esercizio 2, che si fa a sua volta per parti}}$$

Dall' Esercizio 2,

$$\int x \cdot \cos(x) \, dx = x \sin(x) + \cos(x) + c$$

quindi

$$\int x^2 \cos(x) \, dx = -x^2 \cos(x) + 2 \int x \cdot \cos(x) \, dx$$

$$= -x^2 \cos(x) + 2 \left( x \sin(x) + \cos(x) \right) + c$$

$$= \boxed{-x^2 \cos(x) + 2x \sin(x) + 2 \cos(x) + c}$$

Esercizio 4 Calcolare il seguente integrale

$$\int \underbrace{e^x}_{f} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'}\, dx$$

In questo caso chi scegliamo come $f$ e $g'$ è totalmente indifferente.

INTEGRAZIONE PER PARTI CIRCOLARE

Prendiamo

$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$

$g'(x) = \sin(x) \rightarrow g(x) = -\cos(x)$

Allora,

$$\int \underbrace{e^x}_{f} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'}\, dx = \underbrace{e^x}_{f} \underbrace{(-\cos(x))}_{g} - \int \underbrace{e^x}_{f'} \underbrace{(-\cos(x))}_{g}\, dx$$

$$= -e^x \cos(x) + \boxed{\int \underbrace{e^x}_{f} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'}\, dx}$$

← anche questo va fatto per parti

$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$

$g'(x) = \cos(x)$

$\rightarrow g(x) = \sin(x)$

$$= -e^x \cos(x) + \underbrace{e^x}_{f} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g}$$

$$- \int \underbrace{e^x}_{f'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g}\, dx.$$

Notate che ho riottenuto l'integrale di partenza, ma con il segno $-$ davanti. Riscrivo l'integrale di partenza e quello che ho ottenuto:

$$\int e^x \sin(x)\, dx = -e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\, dx.$$

Tratto l'uguaglianza come se fosse un'equazione la cui variabile è l'integrale: porto l'integrale a sinistra

$$2 \int e^x \sin(x)\, dx = -e^x \cos(x) + e^x \sin(x)$$

e divido ambo i membri per 2:

$$\boxed{\int e^x \sin(x)\, dx = \frac{-e^x \cos(x) + e^x \sin(x)}{2} + c}$$

## Integrazione per sostituzione

Consideriamo l'integrale

$$\int f(x)\,dx.$$

Si pone $\boxed{x = g(t)}$, dove $g$ è una funzione nella variabile $t$ derivabile e invertibile. La nuova variabile di integrazione sarà la $t$, quindi occorre trasformare il differenziale nel seguente modo:

$$\boxed{dx = g'(t)\,dt}.$$

Il nuovo integrale sarà

$$\boxed{\int f(x)\,dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt}.$$

Si calcola il nuovo integrale e si riporta il risultato nella variabile $x$.

**Esercizio 1** Calcolare il seguente integrale

$$\int x \cdot \cos(x^2)\,dx$$

Per sostituzione: poniamo $x^2 = t$. Ricaviamo $g(t)$

$$x^2 = t \longrightarrow \boxed{x = \sqrt{t}}$$

$$g(t) = \sqrt{t} = t^{1/2} \rightarrow g'(t) = \frac{1}{2} t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} t^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$t^{-1/2} = \frac{1}{t^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Allora

$$g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow \boxed{dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt}$$

e quindi

$$\int x \cdot \cos(x^2)\,dx = \int \sqrt{t} \cdot \cos(t) \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$$

$$= \int \cancel{\sqrt{t}} \cdot \cos(t) \cdot \frac{1}{2\cancel{\sqrt{t}}}\,dt = \frac{1}{2} \int \cos(t)\,dt = \frac{1}{2}\sin(t) + c$$

$$\underset{t = x^2}{=} \boxed{\frac{1}{2}\sin(x^2) + c}$$

**Esercizio 2** Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{1}{2x-5}\,dx.$$

Per sostituzione: poniamo $t = 2x-5 \to t+5 = 2x$

$$\to \frac{t+5}{2} = x \to x = \frac{t+5}{2}$$

quindi

$$g(t) = \frac{t+5}{2} \to g(t) = \frac{t}{2} + \frac{5}{2} \to g'(t) = \frac{1}{2}$$

$$\to dx = g'(t)\,dt = \frac{1}{2}\,dt.$$

Allora

$$\int \frac{1}{2x-5}\,dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t| + c$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ t = 2x-5}}{=} \boxed{\frac{1}{2}\ln|2x-5| + c}.$$

**Esercizio 3** Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{x+1}{x-3}\,dx$$

$$= \int \frac{x-3+3+1}{x-3}\,dx = \int \frac{x-3+4}{x-3}\,dx = \int\left(\cancel{\frac{x-3}{x-3}} + \frac{4}{x-3}\right)dx$$

$$= \int\left(1 + \frac{4}{x-3}\right)dx = \int 1 \cdot dx + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx = x + 4\int \frac{1}{x-3}\,dx$$

Per risolvere l'integrale rimasto, poniamo $t = x-3 \to \boxed{x = t+3}$

$$\to dx = (t+3)'\,dt = 1 \cdot dt = dt$$

e quindi

$$\int \frac{1}{x-3}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| + c \overset{t=x-3}{=} \ln|x-3| + c$$

Allora, $\boxed{\int \frac{x+1}{x-3}\,dx = x + 4\ln|x-3| + c.}$

**Esercizio 4** Calcolare il seguente integrale

$$\int e^{3x-1}\,dx$$

Poniamo $t = 3x-1 \longrightarrow 3x = t+1 \longrightarrow \boxed{x = \frac{t+1}{3} = \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}}$

$\longrightarrow \boxed{dx = \frac{1}{3}dt}$

Allora

$$\int e^{3x-1}dx = \int e^{t}\cdot\frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int e^{t}dt = \frac{1}{3}e^{t}+c \underset{\uparrow}{\overset{t=3x-1}{=}} \boxed{\frac{1}{3}e^{3x-1}+c}$$

**Esercizio 5** Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\ln^2(x)}{x}dx$$

Poniamo $t = \ln(x) \longrightarrow \boxed{x = e^{t}} \longrightarrow \boxed{dx = e^{t}dt}$

$$\int \frac{\ln^2(x)}{x}dx = \int \frac{t^2}{\cancel{e^{t}}}\cdot\cancel{e^{t}}dt = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3}+c$$

$$\underset{t=\ln(x)}{=} \boxed{\frac{\ln^3(x)}{3}+c}$$

**Esercizio 6** Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{e^{x}}{1+e^{2x}}dx$$

Poniamo $t = e^{x} \longrightarrow \boxed{x = \ln(t)} \longrightarrow \boxed{dx = \frac{1}{t}dt}$

Allora

$$\int \frac{e^{x}}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{\cancel{t}}{1+t^2}\,\frac{1}{\cancel{t}}dt = \int \frac{1}{1+t^2}dt$$

$e^{2x} = e^{x\cdot 2} = (e^{x})^2$

$$= \operatorname{arctg}(t)+c \underset{t=e^{x}}{=} \boxed{\operatorname{arctg}(e^{x})+c}$$

**Esercizio 7** Calcolare il seguente integrale

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx$$

Poniamo $t = \sin(x)$. Quando si fa un integrale per sostituzione con funzioni goniometriche, anziché ricavarsi $g(t)$ è più conveniente osservare che

$$t = \sin(x) \longrightarrow dt = (\sin(x))'\,dx = \cos(x)\,dx.$$

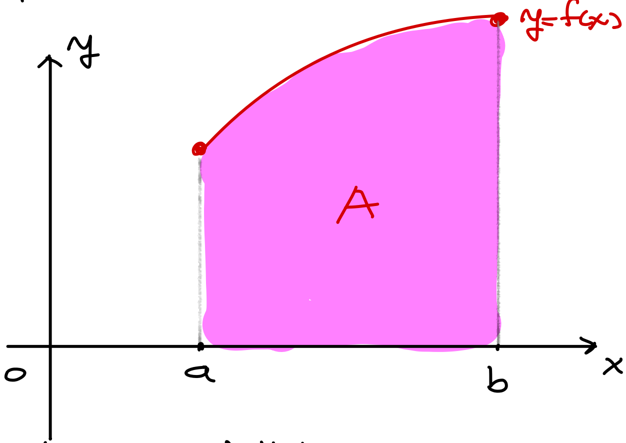
In questo modo,

$$\int \frac{\cos(x)}{1+\sin^2(x)}\,dx = \int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg}(t)+c$$

$$\underset{t=\sin(x)}{=} \boxed{\operatorname{arctg}(\sin(x))+c}$$

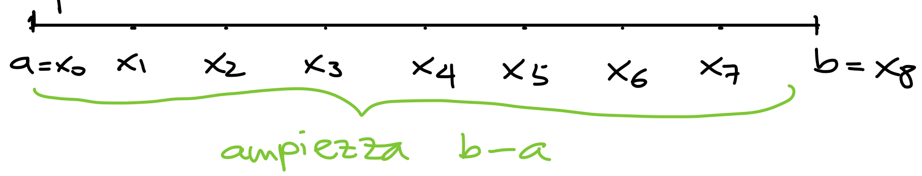
# INTEGRALI DEFINITI

Consideriamo una funzione continua $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
Vogliamo capire come calcolare l'area sottesa dal grafico di $f$ nell'intervallo $[a,b]$, cioè l'area della figura compresa tra il grafico di $f$, l'asse $x$ e le rette $x=a$, $x=b$.
Indichiamo quest'area con $A$.




Essendo $A$ l'area di una figura a contorno mistilineo, al massimo possiamo approssimarla ad una figura di cui so calcolare l'area.

Innanzitutto consideriamo una partizione dell'intervallo $[a,b]$, ovvero una suddivisione in sottointervalli che non hanno punti in comune se non gli estremi. Inoltre, li scegliamo tutti con la stessa ampiezza:

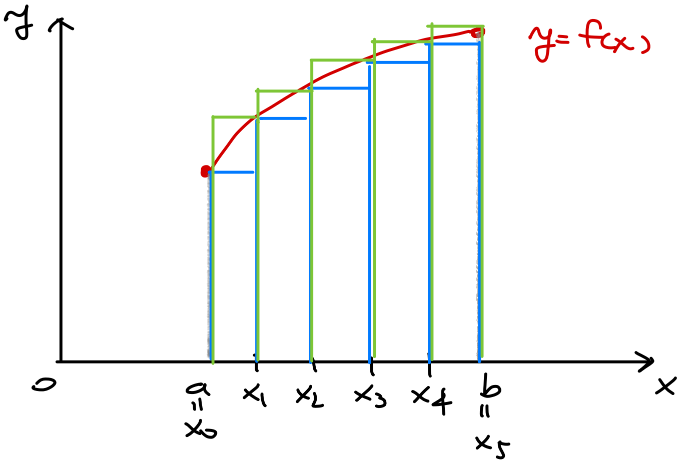



una partizione di $[a,b]$ in 8 intervalli può essere

$$\{[x_0=a, x_1], [x_1,x_2], [x_2,x_3], \dots, [x_6,x_7], [x_7, x_8=b]\}$$

se gli intervalli sono $n$, ognuno avrà ampiezza $\dfrac{b-a}{n}$.

Dalla partizione costruisco dei rettangoli. L'unione di questi rettangoli, detta plurirettangolo, è una figura di cui certamente so calcolare l'area e la cui area approssima l'area $A$.
Il plurirettangolo blu approssima $A$ per difetto, mentre quello verde approssima $A$ per eccesso.



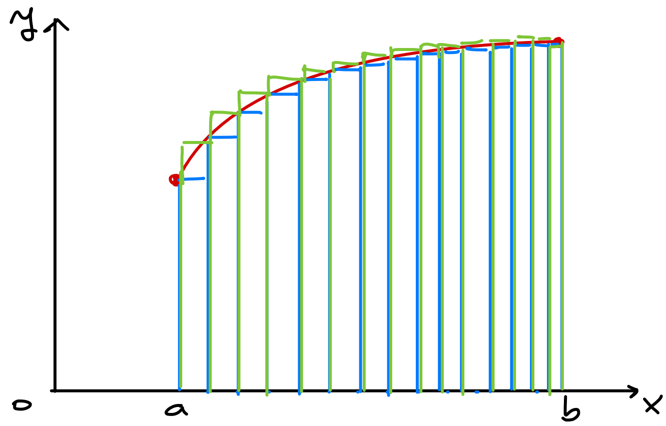

Se la partizione è di $n$ intervalli, l'area del plurirettangolo blu si indicherà con $s_n$, mentre quella del plurirettangolo verde con $S_n$.
Si ha che $\boxed{s_n \leq A \leq S_n \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

## Che succede se aumento il numero di sottointervalli?

Le approssimazioni di A date dalle aree dei plurirettangoli diventano più precise.

Quindi sia $s_n$ che $S_n$ assomigliano di più ad A.

In realtà $s_n$ e $S_n$ sono delle successioni:




- $(s_n)_n$ successione delle aree approssimate per difetto,
- $(S_n)_n$ successione delle aree approssimate per eccesso.

Poiché se aumenta il numero di sottointervalli $n$ l'approssimazione è più precisa, mi aspetto che se $n \to \infty$ si abbia esattamente il valore di A.

**Def**: sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Si dice che $f$ è integrabile in $[a,b]$ se

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}.$$

In tal caso il valore dei limiti è proprio il valore A dell'area sottesa dal grafico di $f$ in $[a,b]$.

Questo valore si chiama integrale definito di $f$ in $[a,b]$ e si indica con

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

Quindi $\int_a^b f(x)\,dx$ è il valore dell'area compresa tra il grafico di $f$, l'asse $x$ e le rette $x=a$, $x=b$.

### Proprietà dell'integrale definito:

(1) $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

(2) $$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

(3) se $a \leq c \leq b$, allora

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

(4) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(5) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$

**Quali funzioni sono integrabili?**

**Teorema:** ogni funzione $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua è integrabile.

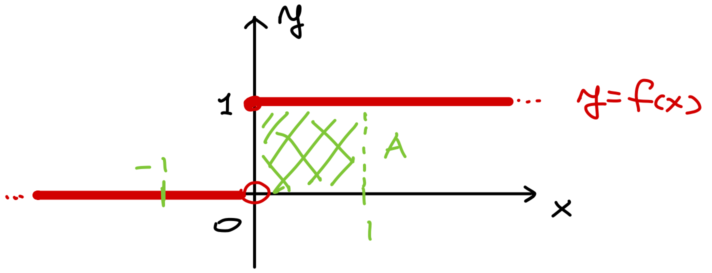
Tuttavia, esistono anche funzioni integrabili che non sono continue.

**Corollario:**

Ogni funzione limitata con un numero finito di salti è integrabile.
("limitata" significa che $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ tali che $m \leq f(x) \leq M \;\; \forall x$, quindi non va mai a infinito)

Esempio: consideriamo la funzione "gradino di Heaviside"

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$




consideriamo come intervallo
$[a,b] = [-1,1]$.

Questa funzione non è continua in $[-1,1]$ perché ha un salto in $x=0$. Tuttavia lei è integrabile grazie alla proprietà (3):

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \underset{(3)}{=} \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{1} 1\,dx = 1.$$

L'area vale 1 perché è un quadrato di lato 1.

Quindi la funzione gradino di Heaviside è integrabile in $[-1,1]$ pur non essendo continua, perché ha un salto in $x=0$.

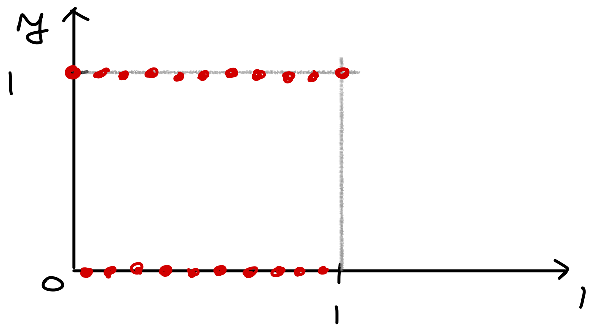
Se però una funzione ha un numero infinito di salti, non è detto che sia integrabile.

Esempio (funzione NON integrabile):
Consideriamo la funzione di Dirichlet così fatta: $f: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}}$$

← numeri razionali in $[0,1]$

← numeri irrazionali in $[0,1]$



Essendo gli irrazionali infiniti, questa funzione vale 1 in infiniti punti e 0 in infiniti punti.
In sostanza, f ha un numero infinito di salti.
Non è nemmeno integrabile, perché comunque scelgo una partizione dell'intervallo $[0,1]$, avremo sempre

$$s_n = 0 \quad , \quad S_n = 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

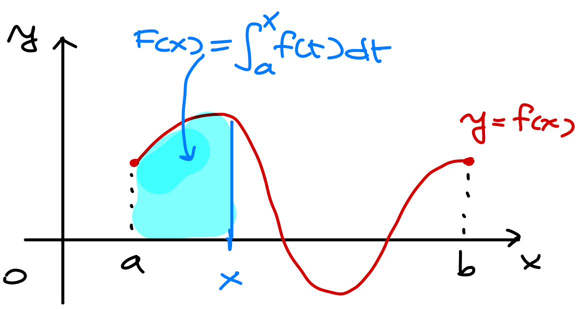
Quindi $\lim_{n\to\infty} s_n = 0 \neq \lim_{n\to\infty} S_n = 1 \implies \nexists \int_0^1 f(x)\,dx$

$\implies$ non integrabile in $[0,1]$.

Ora rispondiamo a un'ultima domanda: se l'integrale definito è un'area e quello definito restituisce le primitive, perché usiamo lo stesso simbolo per due cose diverse?
Vediamo che le due cose sono in realtà connesse tra loro.

**Def:** sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile.
Definiamo la funzione integrale di f come la funzione $F: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$




La funzione integrale di f in $[a,b]$ è una funzione F che a ogni $x \in [a,b]$ associa l'area sottesa dal grafico di f nell'intervallo $[a,x]$.

## Teorema fondamentale del calcolo integrale

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione CONTINUA. Allora la sua funzione integrale

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

è una sua primitiva, cioè $F$ è derivabile in $[a,b]$ e

$$\boxed{F'(x)=f(x)\quad \forall x\in[a,b]}$$

Inoltre, per ogni primitiva $F$ di $f$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)}$$

**Esercizio 1** Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\sin(x)\,dx.$$

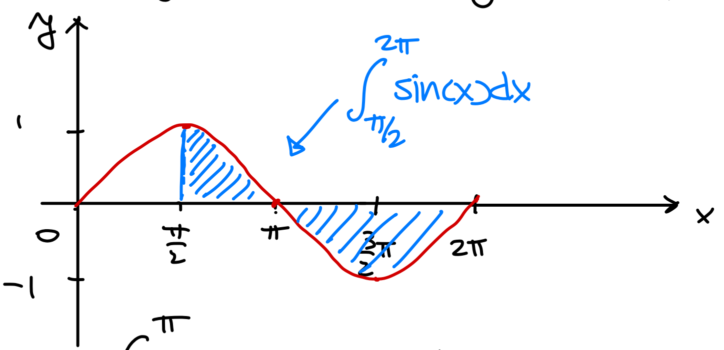
Un integrale definito si calcola esattamente come uno indefinito, per poi alla fine valutare la primitiva trovata sugli estremi.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\sin(x)\,dx=\Big[-\cos(x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}=-\overbrace{\cos(2\pi)}^{1}-\big(-\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{0}\big)$$

$$=-1-0=\boxed{-1}$$

N.B: l'integrale definito restituisce l'area CON SEGNO, cioè l'area sarà negativa se il grafico di $f$ giace sotto l'asse $x$.

Dato che più della metà dell'area considerata è sotto l'asse $x$, ci è venuto un integrale definito negativo.




Se invece avessimo calcolato $\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(x)$, sarebbe stato positivo.

Invece $\int_{\pi/2}^{3/2\pi}\sin(x)\,dx=0$ perché l'area sotto l'asse $x$ è uguale a quella sopra l'asse $x$.

**Esercizio 2** Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^e \underbrace{x^2}_{g'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{f}\, dx$$

$f(x) = \ln(x) \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = x^2 \longrightarrow g(x) = \frac{x^3}{3}$

Integriamo per parti:

$$\int_1^e x^2 \ln(x)\, dx = \left[\underbrace{\frac{x^3}{3}}_{g} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{f}\right]_1^e - \int_1^e \underbrace{\frac{x^{\cancel{3}\,2}}{3}}_{g} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cancel{x}}}_{f'}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3}dx = \frac{e^3}{3}\ln(e) - \frac{1^3}{3}\ln(1) - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx$$

$$= \frac{e^3}{3}\cdot 1 - \frac{1}{3}\cdot 0 - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e$$

$\ln(e) = 1$

$\ln(1) = 0$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{e^3}{3} - \frac{1^3}{3}\right] = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{e^3}{3} - \frac{e^3}{9} + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{3-1}{9}e^3 + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}}$$

**Esercizio 3** Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$$

Per sostituzione, poniamo $\sqrt{x} = t \longrightarrow \boxed{x = t^2} \longrightarrow \boxed{dx = 2t\, dt}$.

Nell' integrale definito bisogna anche cambiare gli estremi di integrazione:

- $x = 1 \longrightarrow t = \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1 \longrightarrow \boxed{t = 1}$
- $x = 4 \longrightarrow t = \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2 \longrightarrow \boxed{t = 2}$

Dunque

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int_1^2 \frac{e^t}{\cancel{t}}\, 2\cancel{t}\, dt = \int_1^2 2e^t dt = 2\int_1^2 e^t dt = 2\left[e^t\right]_1^2$$

$$= 2(e^2 - e^1) = \boxed{2(e^2 - e)}$$

Negli integrali definiti non c'è bisogno di tornare alla variabile $x$

**Esercizio 4** Calcolare l'integrale

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{\cos(x)} \cdot \sin(x)\, dx$$

Per sostituzione, poniamo $\boxed{t = \cos(x)}$. Essendo t uguale a una funzione goniometrica, ricaviamo subito

$$dt = (\cos(x))' dx = -\sin(x)\, dx.$$

Per gli estremi:

- $x = \frac{\pi}{2} \longrightarrow t = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $x = \pi \longrightarrow t = \cos(\pi) = -1$

$-\sin(x)\, dx = dt$

$\longrightarrow \sin(x)\, dx = -dt$

Quindi

$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{\cos(x)} \cdot \underbrace{\boxed{\sin(x)\, dx}}_{-dt} = \int_{0}^{-1} e^{t} \cdot (-1)\, dt = -\int_{0}^{-1} e^{t}\, dt \overset{(4)}{=} +\int_{-1}^{0} e^{t}\, dt$$

$$= [e^t]_{-1}^{0} = \underbrace{e^0}_{=1} - e^{-1} = 1 - e^{-1} = \boxed{1 - \frac{1}{e}}$$

$e^{-1} = \frac{1}{e}$

**Esercizio 5** Calcolare il seguente integrale

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x-1}\, dx$$

Poniamo $t = x - 1 \longrightarrow \boxed{x = t + 1} \longrightarrow \boxed{dx = dt}$

- se $x = -2 \longrightarrow t = -2 - 1 = -3$
- se $x = 0 \longrightarrow t = 0 - 1 = -1$

$|-1| = 1$

$|-3| = 3$

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x-1}\, dx = \int_{-3}^{-1} \frac{1}{t}\, dt = [\ln|t|]_{-3}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-3|$$

$$= \underbrace{\ln(1)}_{=0} - \ln(3) = \boxed{-\ln(3)}$$

Esercizio 6 Calcolare il seguente integrale

$$\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

Questo si fa per sostituzione in 2 modi:

- $t = x^2$, oppure
- $t = x^2+1$

Noi lo risolviamo ponendo $t = x^2+1 \longrightarrow x^2 = t-1 \longrightarrow x = \pm\sqrt{t-1}$

Però, siccome $x \in [0, \sqrt{e-1}]$, allora $x > 0$ e quindi $x = +\sqrt{t-1}$.

Se $x = \sqrt{t-1} \longrightarrow dx = (\sqrt{t-1})'\,dt = \dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}\,dt$

Infine,

- $x = 0 \longrightarrow t = 0^2+1 = 1$
- $x = \sqrt{e-1} \longrightarrow t = (\sqrt{e-1})^2+1 = e-1+1 = e$

Quindi,

$$\int_0^{\sqrt{e-1}} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \int_1^e \frac{\cancel{2\sqrt{t-1}}}{t} \cdot \frac{1}{\cancel{2\sqrt{t-1}}}\,dt = \int_1^e \frac{1}{t}\,dt$$

$$= \Big[\ln|t|\Big]_1^e = \ln|e| - \ln|1| = \ln(e) - \ln(1) = 1 - 0 = \boxed{1}$$

$|e| = e, \quad |1| = 1$