CAPITOLO 5: LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Fino ad ora abbiamo visto solo equazioni numeriche, ovvero equazioni la cui incognita è un numero, indicato con x.

Un'equazione differenziale, invece, è un'equazione la cui incognita è una funzione, indicata con y.

Il grado delle equazioni numeriche è sostituito dall'ordine nelle equazioni differenziali, che è il più alto ordine di derivata che appare.

Ad esempio, un'equazione differenziale di ordine $n \geq 1$ è scritta nella forma

$$\boxed{F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0}$$

dove $y = y(x)$, cioè una funzione dipendente da x.

Noi spesso vedremo equazioni differenziali espresse in forma normale, ovvero

$$\boxed{y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}$$

Alcuni esempi:

- $y' + 5e^x y = 0$ è un'equazione differenziale del primo ordine, perché la derivata di ordine massimo che compare è la derivata prima y'.

- $y y''' + x^2 e^{y'} = 0$ è un'equazione del 3° ordine.

Un'equazione differenziale si dice lineare se la y e tutte le sue derivate compaiono solo come potenze di grado 1.

Esempi:

- $y' - y = x^2$ è un'equazione del 1° ordine LINEARE
- $x^4 y'' + y' - x^2 y = 0$ è un'equazione del 2° ordine LINEARE
- $(y'')^3 + 3yy' = 0$ è un'equazione del 2° ordine NON LINEARE, perché y'' è elevato alla 3 e inoltre appare un termine yy'.
- $y' = \cos(y)$ è un'equazione del 1° ordine NON LINEARE, a causa del termine $\cos(y)$.
- $y' = \cos(x)$ è un'equazione del 1° ordine LINEARE.

un'equazione differenziale si dice omogenea se non compaiono termini senza y o sue derivate.

Esempi:

- $y' - y = 0$ omogenea
- $y' - y = x^2$ NON omogenea
- $y' - y = 3$ NON omogenea
- $y' - x^2 y = 0$ omogenea

"più"

Def: una soluzione di un'equazione differenziale di ordine $n \geq 1$ della forma $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ è una funzione φ derivabile n volte e tale che φ soddisfi l'equazione, cioè

$$F(x, \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n)}) = 0.$$

Ad esempio, per l'equazione differenziale

$$y' - y = 0,$$

una soluzione è $\varphi(x) = e^x$ perché

$$\varphi(x) = e^x \longrightarrow \varphi'(x) = e^x$$

$$\longrightarrow \varphi'(x) - \varphi(x) = e^x - e^x = 0.$$

Notiamo però che anche $\varphi(x) = 2e^x$ è soluzione di $y' - y = 0$, perché $\varphi'(x) = 2e^x$ e quindi

$$\varphi'(x) - \varphi(x) = 2e^x - 2e^x = 0.$$

Le soluzioni di un'equazione differenziale, se esistono, sono INFINITE e dipendono da n costanti arbitrarie, dove n è l'ordine dell'equazione.

Esempi:

1 COSTANTE

- $y' - y = 0$ $\boxed{1^\circ \text{ ordine}}$ $\longrightarrow$ SOLUZIONI: $y(x) = c\, e^x, \ c \in \mathbb{R}$
- $y'' + y = 0$ $\boxed{2^\circ \text{ ordine}}$ $\longrightarrow$ SOLUZIONI: $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

2 COSTANTI

Def: l'insieme di tutte le soluzioni di un'equazione differenziale si chiama **integrale generale** dell'equazione.

Ad esempio,

- l'integrale generale di $y' - y = 0$ è $y(x) = c\,e^x$, $c \in \mathbb{R}$,
- l'integrale generale di $y'' + y = 0$ è $y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Se si vuole una soluzione specifica per un'equazione differenziale si devono richiedere delle **condizioni iniziali**, che sono tante quante le costanti da determinare, ossia tante quante l'ordine dell'equazione.

EQUAZIONE DIFFERENZIALE	+	CONDIZIONI INIZIALI	=	**PROBLEMA DI CAUCHY**

Esempi:

- per l'equazione $y' - y = 0$ vogliamo trovare la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $\boxed{y(0) = 1}$.

  Avremo un problema di Cauchy così fatto:

$$\boxed{\begin{cases} y' - y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}}$$

La soluzione di un problema di Cauchy si trova seguendo questi 3 passi:

(1) si determina l'integrale generale dell'equazione:

$$y(x) = c \cdot e^x, \quad c \in \mathbb{R}$$

(2) si impongono le condizioni iniziali, così da determinare il valore di $c \in \mathbb{R}$ relativo alla soluzione cercata:

$$y(0) = 1 \rightarrow c \cdot e^0 = 1 \rightarrow \boxed{c = 1}$$

(3) La soluzione cercata si ottiene sostituendo il valore di c trovato nell'integrale generale: $y(x) = 1 \cdot e^x \longrightarrow \boxed{y(x) = e^x}$ SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY

- per l'equazione $y''+y=0$ dobbiamo imporre 2 condizioni iniziali, visto che l'ordine dell'equazione è 2.
se l'ordine è 2, una condizione è richiesta su y e l'altra su y'. Consideriamo allora il seguente problema di Cauchy

$$\boxed{\begin{cases} y''+y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}}$$

seguendo i soliti 3 passi:

(1) l'integrale generale dell'equazione è dato da

$$y(x)=c_1\cos(x)+c_2\sin(x), \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$$

(2) Imponiamo le condizioni iniziali:

□ $y(0)=0 \longrightarrow c_1\underbrace{\cos(0)}_{=1}+c_2\underbrace{\sin(0)}_{=0}=0 \longrightarrow \boxed{c_1=0}$

sostituendo $c_1=0$ nell'integrale generale, questo diventa

$$y(x)=0\cdot\cos(x)+c_2\sin(x)$$

$\longrightarrow y(x)=c_2\sin(x)$

$\longrightarrow y'(x)=c_2\cos(x)$

□ $y'(0)=1 \longrightarrow c_2\cdot\cos(0)=1 \longrightarrow \boxed{c_2=1}$

(3) La soluzione del problema di Cauchy è quella con $c_1=0$, $c_2=1$, cioè

$$\boxed{y(x)=\sin(x)}$$

SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY

Come si determina, però, l'integrale generale di un'equazione differenziale?

EQUAZIONI LINEARI DEL PRIMO ORDINE

Un'equazione lineare del primo ordine compare nella forma

$$\boxed{y' + a(x)\,y = b(x)}$$

dove a, b sono funzioni continue nella variabile x.

L'integrale generale di queste equazioni si trova con la formula

$$\boxed{y(x) = e^{-\int a(x)dx}\left[c + \int b(x)\, e^{\int a(x)dx}\, dx\right], \quad c \in \mathbb{R}}$$

Esercizio 1 Determinare l'integrale generale di

$$y' + y = x.$$

Questa è un'equazione del primo ordine con

- $a(x) = 1$
- $b(x) = x$

$\Big\}$ continue in $\mathbb{R}$

Applichiamo la formula risolutiva:

$$y(x) = e^{-\int 1 \cdot dx}\left[c + \int x \cdot e^{\int 1 \cdot dx} dx\right]$$

$$= e^{-x}\left[c + \int x e^x dx\right]$$

Risolviamo per parti

$$\int \underbrace{x}_{f}\, \underbrace{e^x}_{g'} dx$$

$f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = e^x \longrightarrow g(x) = e^x$

$$= x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$$

// +c già si trova dentro alle quadre.

Perciò abbiamo ottenuto che

$$y(x) = e^{-x}\left[c + x e^x - e^x\right] = c e^{-x} + x \overbrace{e^x e^{-x}}^{1} - \overbrace{e^x e^{-x}}^{1}$$

$$= c e^{-x} + x - 1$$

$e^x e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = c e^{-x} + x - 1}$$

Caso omogeneo: se $b(x)=0$, l'equazione è omogenea e assume la forma $\boxed{y'+a(x)y=0}$.

In tal caso, la formula risolutiva diventa

$$\boxed{y(x)=c\,e^{-\int a(x)dx}, \quad c\in\mathbb{R}}$$

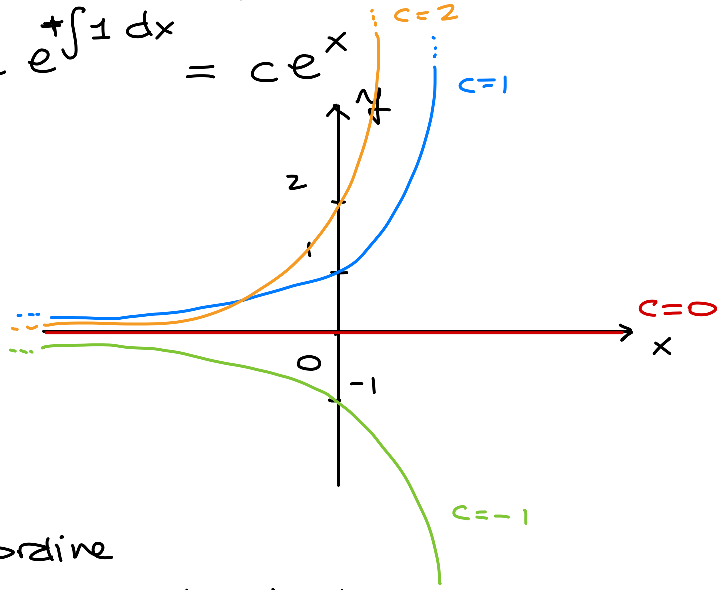
Esercizio 2 Determinare l'integrale generale di

$$y'-y=0$$

Qua $a(x)=-1$ e $b(x)=0$, quindi l'integrale generale è dato da

$$y(x)=c\cdot e^{-\int(-1)dx}=c\,e^{+\int 1\,dx}=c\,e^{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x)=c\,e^{x}, \quad c\in\mathbb{R}}$$



Per le equazioni lineari del primo ordine (omogenee e non omogenee) si ha questo risultato relativamente ai problemi di Cauchy:

Teorema di esistenza e unicità globale

Siano $a,b: I\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, dove I è un intervallo, e siano $x_0\in I$, $y_0\in\mathbb{R}$. Se a,b sono continue in I, allora per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'+a(x)y=b(x) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

esiste un' UNICA soluzione definita in tutto l'intervallo I

$$\boxed{\text{GLOBALE} = \text{soluzione definita in tutto } I}$$

Esercizio 3 Risolvere il seguente problema di Cauchy, specificando l'intervallo di definizione della soluzione:

$$\begin{cases} y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x^2} \\ \boxed{y(-1) = 2.} \end{cases}$$

L'equazione è lineare del 1° ordine, con

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ a(x) = \frac{2}{x} \\ &\bullet\ b(x) = \frac{1}{x^2} \end{aligned}\right\} \text{ continue in } \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

Notiamo che $\mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ NON è un intervallo! Un problema di Cauchy va risolto in un intervallo; chi scelgo come intervallo I tra $(-\infty,0)$ e $(0,+\infty)$?

Si sceglie sempre l'intervallo in cui cade il punto x_0 delle condizioni iniziali: in questo caso $x_0 = -1 \in (-\infty, 0)$

$\Rightarrow I = (-\infty, 0)$

Dato che a, b sono continue in I, il problema di Cauchy ammette un'unica soluzione definita in I. Determiniamola. Cominciamo cercando l'integrale generale dell'equazione

$$y' + \underbrace{\boxed{\frac{2}{x}}}_{a(x)} y = \underbrace{\boxed{\frac{1}{x^2}}}_{b(x)}$$

con la formula

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\left[c + \int b(x)\, e^{\int a(x)dx}\, dx\right].$$

$x \in (-\infty,0) \rightarrow x<0 \rightarrow |x| = -x$

Innanzitutto,

$$\int a(x)dx = \int \frac{2}{x}dx = 2\int\frac{1}{x}dx = 2\ln|x| = 2\ln(-x)$$

$n\ln(a) = \ln(a^n)$

$$= \ln(-x)^2 = \ln(x^2)$$

$(-x)^2 = x^2$

$e^{\ln(b)} = b$

Quindi, $e^{\int a(x)dx} = e^{\ln(x^2)} = x^2.$

Invece,

$$e^{-\int a(x)dx} = e^{-\ln(x^2)} \underset{\uparrow}{=} e^{\ln(x^2)^{-1}} \underset{\nwarrow}{=} e^{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x^2}.$$

$n\ln(a) = \ln(a^n)$ con $n=-1$ $\quad$ $b^{-1} = \frac{1}{b}$

Allora abbiamo che

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\left[c + \int \underbrace{b(x)}_{} \overset{1/x^2}{\overset{\parallel}{\widetilde{}}} e^{\int a(x)dx} dx\right]$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[c + \int \frac{1}{\cancel{x^2}} \cdot \cancel{x^2}\, dx\right] = \frac{1}{x^2}\left[c + \int dx\right]$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[c+x\right] = \frac{c}{x^2} + \frac{x}{x^2} = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x}, \quad c \in \mathbb{R}}$$

Per determinare la soluzione del problema imponiamo la condizione iniziale $y(-1) = 2$:

$$y(-1) = 2 \longrightarrow \frac{c}{(-1)^2} + \frac{1}{-1} = 2 \longrightarrow c - 1 = 2 \longrightarrow \boxed{c=3}$$

Allora, la soluzione del problema di Cauchy è $\boxed{y: (-\infty, 0) \longrightarrow \mathbb{R}}$ data da

$$\boxed{y(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x}.}$$

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

Le equazioni a variabili separabili sono particolari equazioni del primo ordine non lineari e omogenee, che appaiono nella forma

$$\boxed{y' = f(x) \cdot g(y)}$$

dove f, g sono funzioni continue.

Per risolverla dividiamo ambo i membri per $g(y)$. Dobbiamo però accertarci che $g(y) \neq 0$. Quindi:

(1) Studiamo l'equazione $g(y) = 0$ e troviamo, se ce ne sono, delle soluzioni y.

(2) Controlliamo se queste y sono soluzioni dell'equazione differenziale (o del problema di Cauchy):

- se non sono soluzioni, bene!
- se sono soluzioni, dobbiamo tenerlo a mente per aggiungerle, alla fine, nell'integrale generale.

(3) Ora supponiamo $g(y) \neq 0$: posso dividere ambo i membri dell'equazione differenziale per $g(y)$

$$\frac{y'}{g(y)} = \frac{f(x)\cancel{g(y)}}{\cancel{g(y)}} \longrightarrow \frac{y'}{g(y)} = f(x).$$

(4) Integro ambo i membri in dx. Ricordiamo che $y' = y'(x)$

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\,dx = \int f(x)\,dx.$$

Per sostituzione, poniamo $\boxed{y = y(x)} \longrightarrow \boxed{dy = y'(x)\,dx}$

e quindi

$$\int \frac{\overset{dy}{y'(x)}}{g(y(x))}\,dx = \int \frac{1}{g(y)}\,dy$$

(5) Risolvere i due integrali e ottenere l'integrale generale

$$\boxed{\int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx}$$

Esercizio 1 Determinare l'integrale generale di

$$y' = x \cdot \cos^2(y)$$

Questa è un'equazione a variabili separabili con

$$f(x) = x \quad e \quad g(y) = \cos^2(y).$$

Voglio dividere per $g(y)$, quindi studiamo l'equazione $g(y)=0$:

$\cos^2(y) = 0 \longrightarrow \cos(y) = 0 \longrightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Le funzioni costanti $y(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sono soluzioni dell'equazione differenziale?

$\cos^2(y(x)) = 0$, $y'(x) = 0$

$\rightarrow 0 = x \cdot 0 \longrightarrow 0 = 0 \longrightarrow$ le funzioni $y(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ sono soluzioni dell'equazione differenziale!

Adesso ragioniamo per $g(y) \neq 0$, quindi dividiamo ambo i membri dell'equazione per $\cos^2(y)$:

$$y' = x \cdot \cos^2(y) \longrightarrow \frac{y'}{\cos^2(y)} = x$$

Integriamo:

$$\int \frac{y'(x)}{\cos^2(y(x))}\,dx = \int x\,dx \xrightarrow[\substack{y = y(x) \\ dy = y'(x)dy}]{} \int \frac{1}{\cos^2(y)}\,dy = \int x\,dx$$

Risolviamo gli integrali: ricordiamo che $(\mathrm{tg}(y))' = \frac{1}{\cos^2(y)}$ quindi

$$\int \frac{1}{\cos^2(y)}\,dy = \int x\,dx \longrightarrow \mathrm{tg}(y) = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\longrightarrow y = \mathrm{arctg}\left(\frac{x^2}{2} + c\right)$$

Allora l'integrale generale dell'equazione assegnata è dato da

$$\boxed{\begin{aligned} &y(x) = \mathrm{arctg}\left(\frac{x^2}{2} + c\right), \; c \in \mathbb{R} \\ &y(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{aligned}}$$

Il problema di Cauchy associato ad un'equazione a variabili separabili richiede ipotesi più forti per avere esistenza e unicità.

Def: una funzione $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice di classe C^1 in I, e si scrive

$$f \in C^1(I),$$

se è continua in I, derivabile in I con derivata f' continua in I.

Ad esempio, tutte le funzioni elementari sono di classe C^1 nel loro dominio: infatti sono derivabili nel loro dominio e la loro derivata è continua.

Per le equazioni a variabili separabili vale il seguente

Teorema di esistenza e unicità locale

Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in I e sia $g: J \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 in J. Per $x_0 \in I$ e $y_0 \in J$, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x)\, g(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

ammette un' UNICA soluzione definita in un intervallo $I' \subseteq I$.

$$\boxed{\text{LOCALE} = \text{in un sottointervallo } I' \text{ di } I}$$

L'intervallo I' è detto intervallo massimale di definizione per la soluzione.

Nel caso delle equazioni lineari del 1° ordine, visto che c'è esistenza e unicità GLOBALE, $I' = I$.

Esercizio 2 Risolvere il problema di Cauchy seguente, specificando l'intervallo di definizione della soluzione

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{y} \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione, che è a variabili separabili, dove

- $f(x) = 1$ continua in $\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ $\boxed{I = \mathbb{R}}$
- $g(y) = \frac{1}{y}$ di classe C^1 in $\underset{(-\infty,0)\cup(0,+\infty)}{\mathbb{R}\setminus\{0\}}$, $y_0 = 2$ $\longrightarrow$ $\underset{(y_0 \in J)}{J = (0,+\infty)}$

$\rightarrow g \in C^1(J)$

Siamo sotto le ipotesi di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy.

Risolviamo l'equazione: $g(y) = \frac{1}{y}$

$$g(y) = 0 \longrightarrow \frac{1}{y} = 0 \quad \nexists y \longrightarrow g(y) \neq 0 \quad \forall y$$

Posso allora dividere per $g(y)$:

$$y' = \frac{1}{y} \longrightarrow \frac{y'}{\frac{1}{y}} = 1 \longrightarrow y' \cdot y = 1$$

Integriamo:

$$\int y'(x)\, y(x)\, dx = \int dx \xrightarrow[\substack{y = y(x) \\ dy = y'(x) dx}]{} \int y\, dy = \int dx \longrightarrow \boxed{\frac{y^2}{2} = x + c}$$

Imponiamo le condizioni iniziali $y(0) = 2$:

$$\frac{2^2}{2} = 0 + c \longrightarrow 2 = 0 + c \longrightarrow \boxed{c = 2}$$

non è una funzione!

Sostituendo nell'integrale generale,

$$\frac{y^2}{2} = x + 2 \longrightarrow y^2(x) = 2(x+2) \longrightarrow \boxed{y(x) = \pm\sqrt{2(x+2)}}$$

Per avere una funzione devo scegliere il + o il − davanti alla radice.

Scelgo sulla base della condizione iniziale:

$y(0) = 2 > 0 \longrightarrow$ scelgo il segno +

Allora la soluzione del problema di Cauchy è data da

$$\boxed{y(x) = \sqrt{2(x+2)}}$$

Qual è l'intervallo massimale? È il dominio della y

y è definita se $2(x+2) \geq 0 \longrightarrow x+2 \geq 0 \longrightarrow x \geq -2$

L'intervallo massimale I', che è sempre un intervallo aperto, sarà

$$\boxed{I' = (2, +\infty)}.$$

In conclusione, la soluzione del problema è $y: (2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$y(x) = \sqrt{2(x+2)}.$$

Notare che

$$I' = (2, +\infty) \subsetneq I = \mathbb{R}$$

ed è per questo che si parla di soluzione LOCALE.

Se la funzione g non è di classe C^1 in J, la soluzione del problema di Cauchy può non essere unica.

Esempio (problema di Cauchy con infinite soluzioni)

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3\sqrt[3]{y^2} \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Qui $f(x) = 3$ continua in $I = \mathbb{R}$, mentre $g(y) = \sqrt[3]{y^2}$.

Sicuramente g è continua in $\mathbb{R}$, tuttavia non è di classe C^1 in $\mathbb{R}$ perché non è derivabile: infatti ha un punto di non derivabilità in $y_0 = 0$. Lo notiamo perché

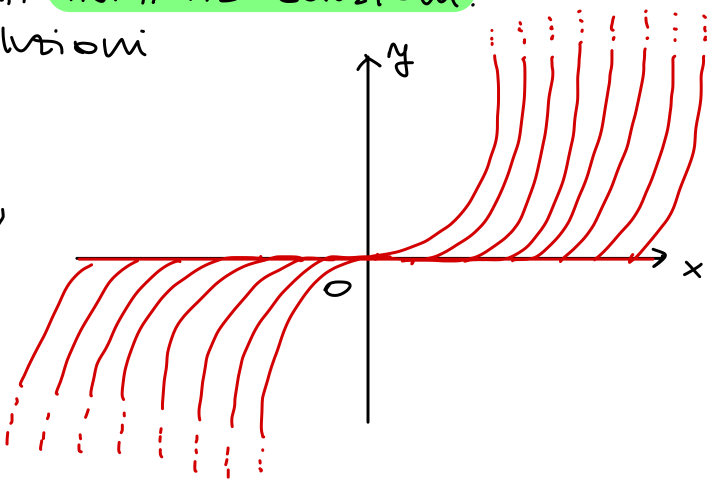
$$g'(y) = (y^{2/3})' = \frac{2}{3} y^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} y^{-1/3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{y}}.$$

- $\lim_{y \to 0^+} g'(y) = \frac{2}{3} \lim_{y \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{y}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{0^+} = +\infty$
- $\lim_{y \to 0^-} g'(y) = -\infty$

$\Rightarrow$ g non derivabile in $y_0 = 0$ e quindi non è C^1 in $J = \mathbb{R}$.

Il problema considerato ha infatti INFINITE soluzioni: nel grafico sono riportate le soluzioni del problema.

Il fenomeno visto ora, cioè di esistenza di infinite soluzioni, si chiama pennello di Peano.



Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy seguente, indicando l'intervallo di definizione della soluzione

$$\begin{cases} y' = 2xy^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

L'equazione è a variabili separabili, con

- $f(x) = 2x$ continua in $\mathbb{R}$ $\longrightarrow$ $\boxed{I = \mathbb{R}}$
- $g(y) = y^2$ continua, derivabile, con derivata continua, ovvero di classe C^1 in $J = \mathbb{R}$.

Allora il problema assegnato ammette un'unica soluzione definita in $I' \subseteq I$, dove I' è l'intervallo massimale.

Cerchiamo la soluzione e cominciamo risolvendo l'equazione, che è a variabili separabili.

$$y' = 2xy^2.$$

Voglio dividere per y^2.

Se $y^2 = 0 \longrightarrow y = 0$. $y = 0$ è soluzione del problema?

Sostituisco $y = 0$ nell'equazione: $0 = 2x \cdot 0^2 \longrightarrow 0 = 0$

$\longrightarrow$ $y = 0$ è soluzione dell'equazione.

Però NON è soluzione del problema perché non soddisfa la condizione iniziale $y(0) = -1$ visto che se $y(x) \equiv 0$ allora $y(0) = 0 \neq -1$.

Quindi la y che rende $g(y)=0$ non è soluzione del problema.
Allora adesso prendo $g(y)\neq 0$ e divido ambo i membri di

$$y' = 2xy^2$$

per $g(y)=y^2$.

$$\rightarrow \frac{y'}{y^2} = \frac{2x\cancel{y^2}}{\cancel{y^2}} \rightarrow \frac{y'}{y^2} = 2x$$

Integro rispetto a x, ricordando che y è una funzione $y(x)$:

$$\int \frac{\overbrace{y'(x)\,dx}^{dy}}{y^2(x)} = \int 2x\,dx$$

Con la solita sostituzione $y=y(x) \longrightarrow dy = y'(x)\,dx$
otteniamo

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 2x\,dx \longrightarrow \int y^{-2}\,dy = 2\int x\,dx$$

$$\rightarrow \frac{y^{-2+1}}{-2+1} = \cancel{2}\,\frac{x^2}{\cancel{2}} + c \longrightarrow \frac{y^{-1}}{-1} = x^2+c$$

$$\rightarrow \boxed{-\frac{1}{y} = x^2+c}$$

Imponiamo le condizioni iniziali $y(0)=-1$:

$$-\frac{1}{-1} = 0^2 + c \longrightarrow +1 = c \longrightarrow \boxed{c=1}$$

Allora ho ottenuto, sostituendo 1 a c, che

$$-\frac{1}{y} = x^2+1 \longrightarrow \frac{1}{y} = -(x^2+1)$$

$$\longrightarrow y = -\frac{1}{x^2+1} \longrightarrow \boxed{y(x) = -\frac{1}{x^2+1}}$$

in questo caso la soluzione è addirittura GLOBALE

se cerco il dominio di $y(x)$, questo è tutto $\mathbb{R}$ perché
$x^2+1\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

La soluzione del problema assegnato è $y:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ data da

$\boxed{y(x) = -\frac{1}{x^2+1}}$. In questo caso $\boxed{I'=I=\mathbb{R}}$

EQUAZIONI DEL SECONDO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI

Per poter risolvere queste equazioni occorre introdurre i numeri complessi.

Cenni sui numeri complessi

Ricordiamo che l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ si introduce perché nell'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$ non è possibile fare la radice di un numero primo:

$$p \text{ primo} \Rightarrow \sqrt{p} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \text{(cioè è irrazionale)}.$$

Tuttavia, nemmeno in $\mathbb{R}$ posso trovare le radici di ogni numero, perché non posso fare la radice di indice pari di un numero negativo:

$$\sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \quad \text{perché} \quad \nexists x \in \mathbb{R} : x^2 = -1.$$

Per questo motivo l'equazione $x^2+1=0$ non ha soluzioni reali. Ma come questa, anche altre equazioni non hanno soluzioni reali, come per esempio le equazioni di 2° grado con $\Delta < 0$.

In generale vale questo teorema:

Teorema fondamentale dell'algebra su $\mathbb{R}$

Ogni equazione di grado $n \geq 1$ a coefficienti reali ammette **AL MASSIMO** n soluzioni, contate con la loro molteplicità.

Esempio: l'equazione di 2° grado $ax^2+bx+c=0$:

- se $\Delta > 0$, ha 2 soluzioni reali distinte, cioè ognuna con molteplicità 1;
- $\Delta = 0$, ha 2 soluzioni reali coincidenti, ovvero una con molteplicità 2;
- $\Delta < 0$, non ha soluzioni reali.

Molteplicità = quante volte si ripete la soluzione.

$$x^2-2x+1=0 \longrightarrow (x-1)^2=0 \longrightarrow \underset{x=1}{(x-1)}\underset{x=1}{(x-1)}=0$$

La soluzione è $x=1$ con molteplicità 2.

Per trovare le soluzioni anche quando $\Delta < 0$ si introduce un numero, detto unità immaginaria e il cui simbolo è i.
L'unità immaginaria i è quel numero tale che

$$\boxed{i^2 = -1}.$$

Grazie a questa possiamo definire l'insieme dei numeri complessi:

$$\boxed{\mathbb{C} := \{ z = x + iy : x, y \in \mathbb{R} \}}$$

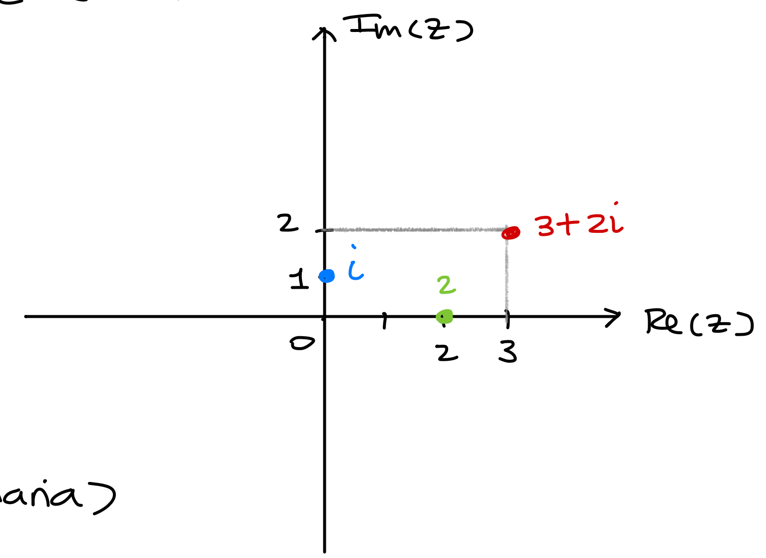
Un numero complesso z è della forma

$$x + iy$$

dove

- x è la parte reale di z, in simboli $x = \mathrm{Re}(z)$,
- y è la parte immaginaria di z, in simboli $y = \mathrm{Im}(z)$.

I numeri complessi si rappresentano nel piano di Argand-Gauss, detto anche piano complesso, in cui l'asse delle ascisse è detto asse reale e quello delle ordinate è detto asse immaginario.



Un numero complesso $z = x + iy$ si identifica con la coppia di numeri reali (x, y).
Allora:

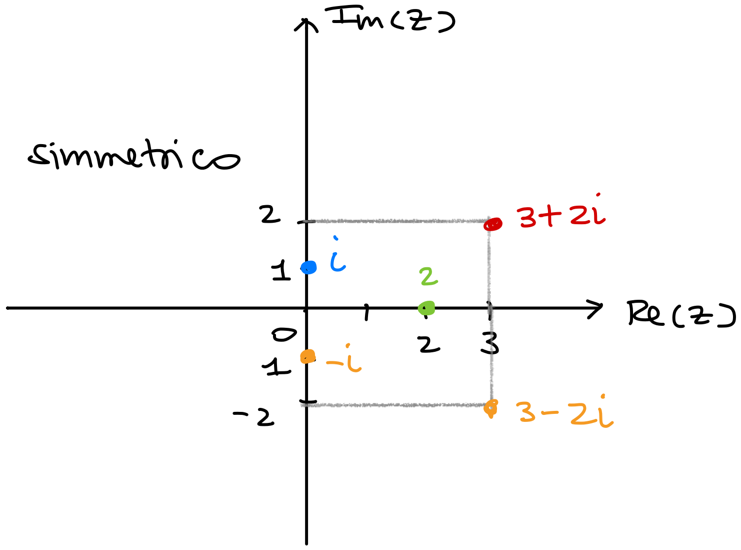
- il numero $z = 3 + 2i$ si rappresenta come $(3, 2)$,
- il numero $z = i$ (unità immaginaria) si rappresenta come $(0, 1)$,
  $i = 0 + i \cdot 1$
- il numero $z = 2$ (numero reale!) si rappresenta come $(2, 0)$.
  $2 = 2 + i \cdot 0$

Se un numero complesso ha parte reale $x = 0$, si chiama numero immaginario puro e si trova nell'asse immaginario.
Se un numero complesso ha parte immaginaria $y = 0$, allora è un numero reale e si trova nell'asse reale.
Quindi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Per un numero complesso $z = x + iy$ è detto **numero complesso coniugato** il numero

$$\boxed{\bar{z} = x - iy}$$

e nel piano complesso questo è il simmetrico di z rispetto all'asse reale:



- $z = 3 + 2i \longrightarrow \bar{z} = 3 - 2i$ $\rightsquigarrow (3, -2)$
- $z = i \longrightarrow \bar{z} = -i \rightsquigarrow (0, -1)$.

Per i numeri complessi vale la seguente identità: se $z = x + iy$, allora

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x \left(\cos(y) + i\sin(y)\right)}.$$

Tornando alle equazioni (numeriche), nell'insieme $\mathbb{C}$ vale il

Teorema fondamentale dell'algebra in $\mathbb{C}$

Ogni equazione di grado $n \geq 1$ a coefficienti complessi ammette **ESATTAMENTE** n soluzioni, contate con la loro molteplicità.

Per un'equazione di 2° grado:

- $\Delta > 0 \rightarrow$ 2 soluzioni reali distinte
- $\Delta = 0 \rightarrow$ 2 soluzioni reali coincidenti
- $\Delta < 0 \rightarrow$ **2 soluzioni complesse coniugate**

Esempio: risolviamo in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z^2 - 2z + 5 = 0$$

Calcoliamo il Δ:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$$

Per trovare le soluzioni complesse notiamo che

$$\sqrt{-16} = \sqrt{-1 \cdot 16} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16} = \underbrace{\sqrt{-1}}_{i} \cdot 4 = 4i.$$

Allora,

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i \begin{cases} z_1 = 1 + 2i \\ z_2 = 1 - 2i \end{cases}$$ coniugate

Equazioni differenziali del 2° ordine a coefficienti costanti omogenee

Studiamo equazioni della forma

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0} \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R} \ (a \neq 0)$$

2° ordine — omogenea — coefficienti costanti

Per risolvere questa equazione faccio la sostituzione

$$\boxed{y = e^{\lambda x}}$$

λ = "LAMBDA"

Allora, $y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ e sostituendo nell'equazione abbiamo

$$a \cdot \lambda^2 e^{\lambda x} + b \cdot \lambda e^{\lambda x} + c\, e^{\lambda x} = 0.$$

Dividiamo ambo i membri per $e^{\lambda x}$: dato che $e^{\lambda x} \neq 0 \ \forall x$ non perdo soluzioni

$$\frac{a \cdot \lambda^2 e^{\lambda x} + b \cdot \lambda e^{\lambda x} + c\, e^{\lambda x}}{e^{\lambda x}} = \underbrace{\frac{0}{e^{\lambda x}}}_{=0}$$

$$\rightarrow \frac{a \cdot \lambda^2 \cancel{e^{\lambda x}}}{\cancel{e^{\lambda x}}} + \frac{b \lambda \cancel{e^{\lambda x}}}{\cancel{e^{\lambda x}}} + c \frac{\cancel{e^{\lambda x}}}{\cancel{e^{\lambda x}}} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{a\lambda^2 + b\lambda + c = 0} \quad \text{EQUAZIONE CARATTERISTICA}$$

Ho un'equazione di 2° grado in λ: la risolvo e avrò 3 casi.

(1) $\Delta > 0$: l'equazione caratteristica ha 2 soluzioni reali distinte λ_1, λ_2. L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

(2) $\Delta = 0$: l'equazione caratteristica ha 2 soluzioni reali coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2$. L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda_1 x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

(3) $\Delta < 0$: l'equazione caratteristica ha 2 soluzioni complesse coniugate $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. L'integrale generale dell'eq. diff. è

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}\left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Esercizio 1 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Passiamo all'equazione caratteristica:

$$y'' \rightsquigarrow \lambda^2 \quad , \quad y' \rightsquigarrow \lambda \quad , \quad y \rightsquigarrow 1$$

quindi

$$\boxed{\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0}$$

Risolviamola:

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x}}$$

Esercizio 2 Risolvere la seguente equazione differenziale

$$4y'' + 12y' + 9y = 0$$

Ne ricavo l'equazione caratteristica:

$$4\lambda^2 + 12\lambda + 9 = 0$$

$$\Delta = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$$

L'integrale generale dell'equazione è

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2 \, x \, e^{-\frac{3}{2}x} \,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Esercizio 3 Risolvere la seguente equazione differenziale:

$$y'' - y' + y = 0$$

La sua equazione caratteristica è

$$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0 \longrightarrow \sqrt{-3} = \sqrt{-1\ 3} = \sqrt{-1}\ \sqrt{3} = i\sqrt{3}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \underset{\alpha}{\boxed{\frac{1}{2}}} \pm i \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\beta}$$

$$\rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale è

$$\boxed{y(x) = e^{\frac{1}{2}x}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

Equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee

Trattiamo equazioni del tipo

$$\boxed{ay'' + by' + cy = f(x)} \quad \text{con } a,b,c \in \mathbb{R} \ (a \neq 0)$$

dove f è una funzione continua.

Per i problemi di Cauchy associati vale il seguente risultato:

Teorema di esistenza e unicità globale

Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in I e siano $x_0 \in I$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.
Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

ammette un'**unica** soluzione definita **in tutto intervallo I**.

Come si risolve un'equazione del secondo ordine non omogenea?

Si seguono 3 passi:

(1) Si considera l'equazione omogenea associata, ovvero

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (f(x) = 0)$$

e ne si determina l'integrale generale. L'integrale generale dell'omogenea associata si indica con

$$y_0(x).$$

(2) Si determina la **soluzione particolare** dell'equazione, indicata con

$$y_P(x),$$

e ottenuta con il **metodo di somiglianza**.

(3) L'integrale generale dell'equazione non omogenea assegnata è dato da

$$\boxed{y(x) = y_0(x) + y_P(x)}.$$

Metodo di somiglianza

Questo metodo si usa per ricercare la soluzione particolare $y_p(x)$ dell'equazione

$$a y'' + b y' + c y = f(x).$$

Continuiamo a indicare con λ_1, λ_2 le soluzione dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata.

Consideriamo il termine noto $f(x)$. Sulla base di questo:

CASO 1: se $f(x)$ è della forma

$$f(x) = e^{\lambda x} \cdot p(x)$$

dove $p(x)$ è un polinomio di grado n, allora la soluzione particolare $y_p(x)$ dipende dal valore di λ:

- se $\lambda \neq \lambda_1$, $\lambda \neq \lambda_2$: allora $\boxed{y_p(x) = e^{\lambda x} \cdot q(x)}$, dove $q(x)$ è un polinomio di grado n (= stesso grado di p), da determinare,
- se $\lambda = \lambda_1$ oppure $\lambda = \lambda_2$: allora $\boxed{y_p(x) = x \cdot e^{\lambda x} \cdot q(x)}$, dove $q(x)$ è un polinomio di grado n (= stesso grado di p), da determinare,
- se $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$: allora $\boxed{y_p(x) = x^2 \cdot e^{\lambda x} \, q(x)}$, dove $q(x)$ è un polinomio di grado n (= stesso grado di p), da determinare.

N.B: anche una costante è un polinomio ed è un polinomio di grado 0.

Quindi se ad esempio $f(x) = 3e^x$, $p(x) = 3$ e quindi $q(x)$ è una costante.

CASO 2: se $f(x)$ è della forma

$f(x) = e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) \cdot p(x)$ oppure $f(x) = e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) \cdot p(x)$

con $p(x)$ polinomio di grado n, si distinguono 2 casi:

- se $\alpha \pm i\beta \neq \lambda_1$, $\alpha \pm i\beta \neq \lambda_2$: allora

$$\boxed{y_p(x) = e^{\alpha x} \left[\cos(\beta x) \cdot q(x) + \sin(\beta x) \cdot r(x)\right]}$$

dove q, r sono polinomi di grado n (= come p), da determinare,

- se $\alpha \pm i\beta = \lambda_1, \lambda_2$: allora

$$\boxed{y_p(x) = x\, e^{\alpha x} \left[\cos(\beta x) \cdot q(x) + \sin(\beta x) \cdot r(x)\right]}$$

dove q, r sono polinomi di grado n (= come p), da determinare

Esercizio 1 Risolvere il seguente problema di Cauchy, indicando l'intervallo di definizione della soluzione.

$$\begin{cases} y''-y'=x \\ y(0)=0 \\ y'(0)=1 \end{cases}$$

Abbiamo un problema di Cauchy con equazione del $2°$ ordine, dove $f(x)=x$. Dato che f è continua in $I=\mathbb{R}$, il problema ammette un'unica soluzione definita in $I=\mathbb{R}$.

Determiniamo la soluzione, cominciando con il cercare l'integrale generale di

$$y''-y'=x.$$

Consideriamo l'equazione omogenea associata:

$$y''-y'=0$$

$y'' \rightsquigarrow \lambda^2$
$y' \rightsquigarrow \lambda$
$y \rightsquigarrow 1$

la cui equazione caratteristica è

$$\lambda^2-\lambda=0$$

$$\longrightarrow \lambda(\lambda-1)=0 \longrightarrow \boxed{\lambda_1=0 \vee \lambda_2=1}$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$y_0(x)=c_1 e^{0x}+c_2 e^{1\cdot x} = \boxed{c_1+c_2e^x = y_0(x)}$$

$e^{0x}=e^0=1$
$e^{1\cdot x}=e^x$

Determiniamo la soluzione particolare con il metodo di somiglianza:

$$f(x)=x=\underbrace{e^{0\cdot x}}_{e^{\lambda x}}\cdot\underbrace{x}_{p(x)} \longrightarrow p(x)=x \text{ di grado } 1$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=0\\ \lambda_1=0,\ \lambda_2=1\end{array}\right\} \Rightarrow \lambda=\lambda_1$$

Allora la soluzione particolare sarà del tipo

$$y_p(x)=x\cdot \underbrace{e^{\lambda x}}_{=1}\cdot q(x) \qquad q \text{ grado } 1$$

$$\longrightarrow \boxed{q(x)=Ax+B} \text{ con } A, B \text{ da determinare!}$$

La soluzione particolare sarà

$$\boxed{y_p(x) = x(Ax+B)}$$

Determiniamo A e B tenendo a mente che y_p è una soluzione di

$$y'' - y' = x,$$

quindi deve essere tale che

$$y_p'' - y_p' = x.$$

$$y_p(x) = x(Ax+B) = Ax^2 + Bx \longrightarrow y_p'(x) = 2Ax + B \longrightarrow y_p''(x) = 2A$$

Sostituendo nell'equazione:

$$2A - (2Ax+B) = x \longrightarrow 2A - 2Ax - B = x$$

$$\longrightarrow -2Ax + 2A - B = x \longrightarrow (-2A-1)x + 2A - B = 0$$

Perché il polinomio $(-2A-1)x + 2A - B$ sia zero, serve che i coefficienti di ogni grado siano 0, cioè

$$\begin{cases} -2A - 1 = 0 \\ 2A - B = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2A = -1 \\ -1 - B = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A = -1/2 \\ B = -1 \end{cases}$$

Perciò, $q(x) = -\frac{1}{2}x - 1$ e dunque

$$\boxed{y_p(x) = Ax^2 + Bx = -\frac{1}{2}x^2 - x}$$

L'integrale generale di $y'' - y' = x$ è dato da

$$\boxed{y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1 + c_2e^x - \frac{1}{2}x^2 - x}$$

Per determinare la soluzione del problema di Cauchy imponiamo le condizioni iniziali:

- $y(0) = 0 \longrightarrow c_1 + c_2e^0 - \frac{1}{2}\cdot 0 - 0 = 0 \longrightarrow \boxed{c_1 + c_2 = 0}$

$$y'(x) = 0 + c_2e^x - x - 1 = c_2e^x - x - 1$$

- $y'(0) = 1 \longrightarrow c_2e^0 - 0 - 1 = 1 \longrightarrow \boxed{c_2 = 2}$

$$c_1 + c_2 = 0 \longrightarrow c_1 + 2 = 0 \longrightarrow \boxed{c_1 = -2}$$

La soluzione del problema è $\boxed{y(x) = -2 + 2e^x - \frac{1}{2}x^2 - x.}$

Esercizio 2 Risolvere il seguente problema di Cauchy, indicando l'intervallo di definizione della soluzione.

$$\begin{cases} y'' + y = 3\sin(2x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Il problema di Cauchy è del 2° ordine con $f(x) = 3\sin(2x)$, che è continua in $\mathbb{R}$. Allora il problema ammette un'unica soluzione definita in $I = \mathbb{R}$.

Risolviamo l'equazione $y'' + y = 3\sin(2x)$ iniziando dall'omogenea associata

$$y'' + y = 0.$$

La sua equazione caratteristica è

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\rightarrow \lambda^2 = -1 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-1} = \pm i \rightarrow \boxed{\lambda_1 = i \ , \ \lambda_2 = -i}$$

Ricordo che $i = 0 + 1 \cdot i$, $-i = 0 - 1 \cdot i$; $\alpha = 0$, $\beta = 1$

L'integrale generale dell'omogenea è

$$\boxed{y_0(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x)} \qquad (e^{\alpha x} = e^{0\cdot x} = 1)$$

Cerchiamo la soluzione particolare: poiché $f(x) = 3\sin(2x)$, cioè $f(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)\,p(x)$ per

- $\alpha = 0$
- $\beta = 2$
- $p(x) = 2$ (grado 0).

Dato che $0 \pm 2i \neq \lambda_1, \lambda_2$ allora

$$y_p(x) = \cos(\beta x)\,q(x) + \sin(\beta x)\cdot r(x)$$

con $\beta = 2$, q, r costanti. $\quad q(x) = A$
$\quad r(x) = B$

$$\rightarrow y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x).$$

Determiniamo A e B utilizzando il fatto che y_p soddisfa

$$y_p'' + y_p = 3\sin(2x)$$

$$y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$$

$$\rightarrow y_p'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$$

$$\rightarrow y_p''(x) = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$$

Andando a sostituire,

$$-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) + A\cos(2x) + B\sin(2x) = 3\sin(2x)$$

$$\rightarrow -3A\cos(2x) - 3B\sin(2x) = 3\sin(2x) + 0\cdot\cos(2x)$$

$$\rightarrow \begin{cases} -3A = 0 \\ -3B = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = -1 \end{cases} \rightarrow \boxed{y_p(x) = -\sin(2x)}$$

Allora l'integrale generale di $y'' - y = 3\sin(2x)$ è

$$\boxed{y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) - \sin(2x)}$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

- $y(0) = 1 \rightarrow c_1\underbrace{\cos(0)}_{=1} + c_2\overbrace{\sin(0)}^{=0} - \overbrace{\sin(0)}^{=0} = 1 \rightarrow \boxed{c_1 = 1}$

$$\rightarrow y(x) = \cos(x) + c_2\sin(x) - \sin(2x)$$

$$\rightarrow y'(x) = -\sin(x) + c_2\cos(x) - 2\cos(2x)$$

- $y'(0) = 0 \rightarrow -\sin(0) + c_2\cos(0) - 2\cos(0) = 0$

$$\rightarrow c_2 - 2 = 0 \rightarrow \boxed{c_2 = 2}$$

La soluzione del problema di Cauchy è

$$\boxed{y(x) = \cos(x) + 2\sin(x) - \sin(2x)}$$

Esercizio 3 Risolvere il seguente problema di Cauchy, indicando l'intervallo di definizione della soluzione.

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = x e^{2x} \\ y(0) = -2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Essendo un problema di Cauchy con equazione del 2° ordine con $f(x) = x e^{2x}$, continua in $\mathbb{R}$, la soluzione è unica e definita in $I = \mathbb{R}$.

Per determinarla, risolviamo l'equazione

$$y'' - 2y' + y = x e^{2x},$$

la cui omogenea associata è $y'' - 2y' + y = 0$.
Questa ha per equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4 - 4 = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{2}{2} = 1$$

$$\longrightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = 1}$$

L'integrale generale dell'omogenea è dato da

$$\boxed{y_o(x) = c_1 e^x + c_2 x \cdot e^x}$$

Ricaviamo la soluzione particolare: poiché

$$f(x) = x e^{2x},$$

- $p(x) = x$ di grado 1
- $\lambda = 2 \neq 1 = \lambda_1 = \lambda_2$,

la soluzione particolare sarà

$$y_p(x) = e^{2x} \cdot \underbrace{q(x)}_{\text{grado } 1} = (Ax + B) e^{2x}$$

Determiniamo A e B: $y_p(x) = (Ax + B) e^{2x}$

$$\rightarrow y_p'(x) = A e^{2x} + (Ax + B) \cdot 2e^{2x} = A e^{2x} + 2Ax e^{2x} + 2B e^{2x}$$
$$= (2Ax + A + 2B) e^{2x}$$

$$\rightarrow y_p''(x) = 2A e^{2x} + (2Ax + A + 2B) \cdot 2e^{2x} = (4Ax + 4A + 4B) e^{2x}$$

Sostituendo in

$$y_p'' - 2y_p' + y_p = xe^{2x},$$

si ha che

$$(4Ax+4A+4B)e^{2x} - 2(2Ax+A+2B)e^{2x} + (Ax+B)e^{2x} = xe^{2x}$$

$$[\cancel{4Ax}+4A+\cancel{4B}-\cancel{4Ax}-2A-\cancel{4B}+Ax+B]\,\frac{\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}} = \frac{x\,\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}}$$

$$4A-2A+Ax+B = x$$

$$Ax - x + 2A + B = 0 \longrightarrow (A-1)x + 2A + B = 0$$

Poniamo i coefficienti uguali a 0:

$$\begin{cases} A-1=0 \\ 2A+B=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A=1 \\ 2+B=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-2 \end{cases}$$

Allora,

$$\boxed{y_p(x) = (x-2)e^{2x}}$$

e pertanto l'integrale generale dell'equazione è dato da

$$\boxed{y(x) = y_o(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2xe^x + (x-2)e^{2x}}$$

Imponiamo le condizioni iniziali.

- $y(0) = -2 \longrightarrow c_1e^0 + c_2\cdot 0\cdot e^0 + (-2)e^0 = -2$

  $\longrightarrow c_1 - 2 = -2 \longrightarrow \boxed{c_1 = 0}$

$\longrightarrow y(x) = c_2xe^x + (x-2)e^{2x}$

$\longrightarrow y'(x) = c_2e^x + c_2xe^x + e^{2x} + 2(x-2)e^{2x}$

- $y'(0) = 0 \longrightarrow c_2e^0 + c_2\cdot 0\cdot e^0 + e^0 + 2\cdot(-2)e^0 = 0$

  $\longrightarrow c_2 + 1 - 4 = 0 \longrightarrow \boxed{c_2 = 3}$

In conclusione, la soluzione del problema assegnato è

$$\boxed{y(x) = 3xe^x + (x-2)e^{2x}}$$

Esercizio 4 Risolvere il seguente problema di Cauchy, indicando l'intervallo di definizione della soluzione.

$$\begin{cases} y'' - 4y = 4x^2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Il problema di Cauchy assegnato è del 2° ordine con $f(x) = 4x^2$ continua in $\mathbb{R}$, quindi c'è un'unica soluzione definita in $I = \mathbb{R}$.

Risolviamo $y'' - 4y = 4x^2$ considerando l'omogenea associata

$$y'' - 4y = 0,$$

la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4 = 0$

$$\rightarrow \lambda^2 = 4 \rightarrow \boxed{\lambda_1 = -2, \ \lambda_2 = 2}$$

L'integrale generale dell'omogenea è quindi

$$\boxed{y_0(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}}$$

Essendo il termine noto $f(x) = 4x^2$, cioè della forma

$$f(x) = e^{\lambda x} \cdot p(x)$$

con $\lambda = 0$ e $p(x) = 4x^2$ (grado 2), avremo

$$y_p(x) = e^{\lambda x} \cdot q(x) = e^{0x} \, q(x)$$

perché $\lambda \neq \lambda_1, \lambda_2$. Essendo di grado 2,

$$q(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$\rightarrow y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$$

$$\rightarrow y_p'(x) = 2Ax + B \rightarrow y_p''(x) = 2A.$$

Sostituendo nell'equazione $y'' - 4y = 4x^2$ si ha che

$$2A - 4(Ax^2 + Bx + C) = 4x^2$$

$$\rightarrow 2A - 4Ax^2 - 4Bx - 4C = 4x^2 \rightarrow (-4A - 4)x^2 - 4Bx + 2A - 4C = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} -4A - 4 = 0 \\ -4B = 0 \\ 2A - 4C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \\ -2 - 4C = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = 0 \\ C = -\frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow y_p(x) = -x^2 - \frac{1}{2}$$

L'integrale generale dell'equazione è

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} - x^2 - \frac{1}{2}}$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

- $y(0) = 0 \longrightarrow c_1 + c_2 - \frac{1}{2} = 0 \longrightarrow \boxed{c_1 + c_2 = \frac{1}{2}}$

$$y'(x) = -2c_1 e^{-2x} + 2c_2 e^{2x} - 2x$$

- $y'(0) = 0 \longrightarrow -2c_1 + 2c_2 = 0 \longrightarrow \boxed{c_1 = c_2}$

Quindi,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \frac{1}{2} \\ c_1 = c_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2c_1 = \frac{1}{2} \\ c_1 = c_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{4} \\ c_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy assegnato è

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{4} e^{-2x} + \frac{1}{4} e^{2x} - x^2 - \frac{1}{2}}$$

Tenere a mente che la soluzione di un problema di Cauchy è

- definita in I nel caso di equazioni lineari del 1° ordine o del 2° ordine,
- definita in $I' \subseteq I$ per equazioni a variabili separabili.