Funzioni

Consideriamo due insiemi A e B non vuoti.

Def: una funzione f da A a B è una legge che a ogni $a \in A$ associa UNO E UN SOLO $b \in B$. Si scrive

$$\boxed{\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ a &\longmapsto b = f(a) \end{aligned}}$$

UNO = almeno uno

UNO E UN SOLO = esattamente uno

Notazione:

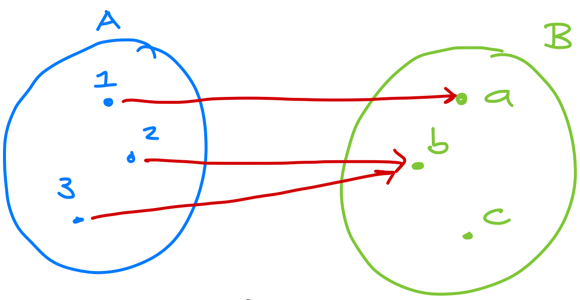
- $f(a)$ immagine di a tramite f,
- A è il dominio di f, cioè l'insieme degli elementi che hanno una corrispondente immagine tramite f,
- B è il codominio di f, cioè l'insieme dei valori che f può assumere (ma che non è detto assuma),
- $\boxed{f(A) := \{b \in B : \exists a \in A, f(a) = b\}}$ è l'immagine di f, cioè il sottoinsieme di B dato dai punti b che sono immagine di qualche $a \in A$ tramite f.

In generale $f(A) \subseteq B$ e può anche accadere che $f(A) \subset B$.

Esempi:

(I) consideriamo la funzione descritta dal grafico a fianco: essa lavora così

$$\begin{aligned} f: 1 &\longmapsto a \\ 2 &\longmapsto b \\ 3 &\longmapsto b \end{aligned}$$



Sicuramente questa corrispondenza tra A e B è una funzione, perché a ogni elemento di A associo uno e un solo elemento di B.

Inoltre, $a = f(1)$, $b = f(2) = f(3)$.

Il dominio di f è $A = \{1, 2, 3\}$.

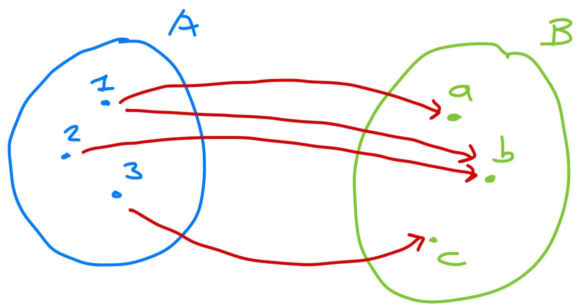
Il codominio di f è $B = \{a, b, c\}$.

L'immagine di f è $f(A) = \{a, b\}$ perché $c \in B$ non è immagine di alcun elemento di A.

Quindi $f(A) \subset B$.

(II) Consideriamo la corrispondenza seguente.

Questa NON è una funzione: infatti a $1 \in A$ sono associati non uno ma 2 elementi di B.



$$1 \longmapsto a$$
$$1 \longmapsto b.$$

Def: Sia $f: A \longrightarrow B$ una funzione. Diremo che

- f è **iniettiva** se ogni elemento $b \in B$ è immagine $\underbrace{\text{AL MASSIMO}}_{\text{0 oppure 1}}$ di un elemento $a \in A$,

La funzione nell'esempio (I) non è iniettiva, perché b è immagine di 2 elementi di A.

- f è **suriettiva** se ogni elemento $b \in B$ è immagine di $\underbrace{\text{ALMENO}}_{\text{1 o più}}$ un elemento $a \in A$, cioè se $f(A) = B$.

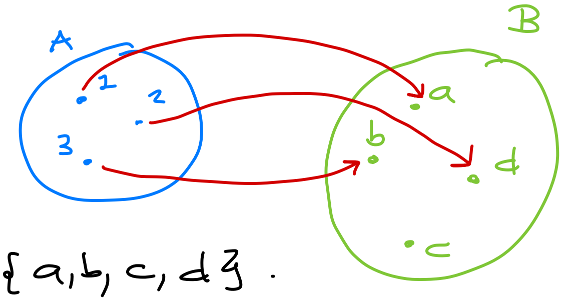
La funzione dell'esempio (I) non è suriettiva, perché
$$f(A) = \{a, b\} \neq B = \{a, b, c\}.$$

- f è **biiettiva** se è sia iniettiva che suriettiva.

Esempi:

(III) Consideriamo la seguente funzione:

$$f:\ 1 \longmapsto a \qquad 2 \longmapsto d \qquad 3 \longmapsto b$$



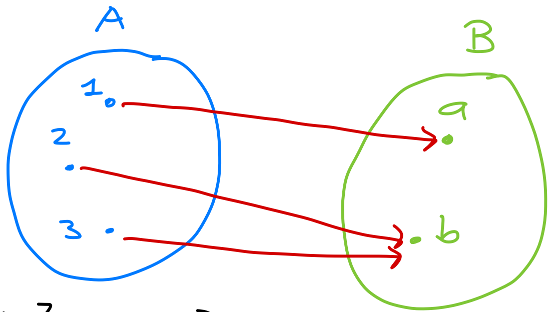
Il codominio di f è $B = \{a, b, c, d\}$.
L'immagine di f è $f(A) = \{a, b, d\}$.
Quindi $f(A) \neq B \implies f$ NON suriettiva

È iniettiva? $a = f(1)$, $b = f(3)$, $d = f(2)$, c non è immagine di nulla

$\implies f$ iniettiva, perché a, b, c, d sono immagine di 0 oppure 1 elemento di A.

(IV) Consideriamo la funzione data da:

$$f:\ 1 \longmapsto a \qquad 2 \longmapsto b \qquad 3 \longmapsto b$$



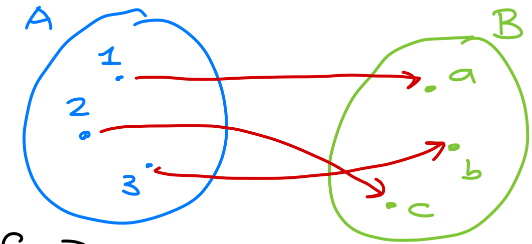
Il codominio è $B = \{a, b\}$
e l'immagine è $f(A) = \{a, b\}$, cioè

$$f(A) = B \implies f \text{ suriettiva}$$

Tuttavia, f non è iniettiva perché b è immagine di 2 elementi.

(V) Consideriamo la funzione data da:

$$f:\ 1 \mapsto a \qquad 2 \mapsto c \qquad 3 \mapsto b$$



f è suriettiva perché $f(A) = \{a, b, c\} = B$. Inoltre, f è iniettiva perché gli elementi di B sono immagine di un elemento di A ciascuno.

$\implies f$ è biiettiva.

CAPITOLO 1: FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Una funzione reale di variabile reale è una funzione

$$\boxed{f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}},$$

cioè una legge che a ogni $x \in D$ associa una e una sola $y \in \mathbb{R}$.

D = dominio di f, $D \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ è il codominio di f.

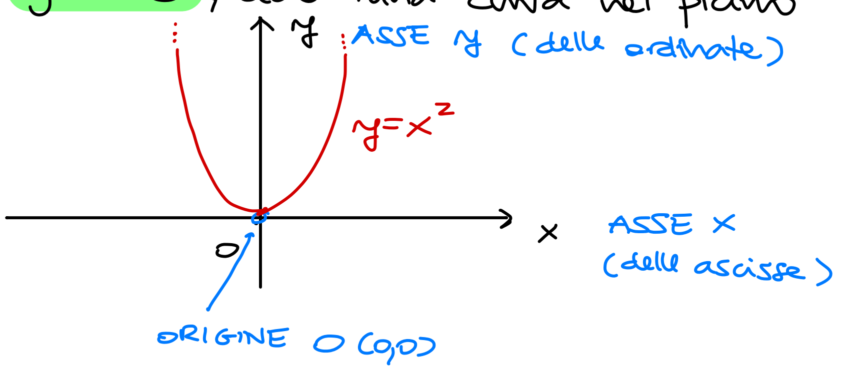
Esempi:

(1) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ data dalla legge di definizione

$$f(x) = x^2.$$

A essa è associato un grafico, cioè una curva nel piano cartesiano:

$$f : x \longmapsto y = x^2$$



Dal grafico si vede che:

- il dominio è $D = \mathbb{R}$
- il codominio è $\mathbb{R}$, ma l'immagine no!

L'immagine di f è $\mathbb{R}^+_0 = [0, +\infty)$: infatti $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ e $\nexists x \in \mathbb{R} : x^2 < 0$. Quindi $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+_0 \neq \mathbb{R}$ e sicuramente $f(x) = x^2$ non è suriettiva.

(2) Consideriamo la funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ la cui legge è

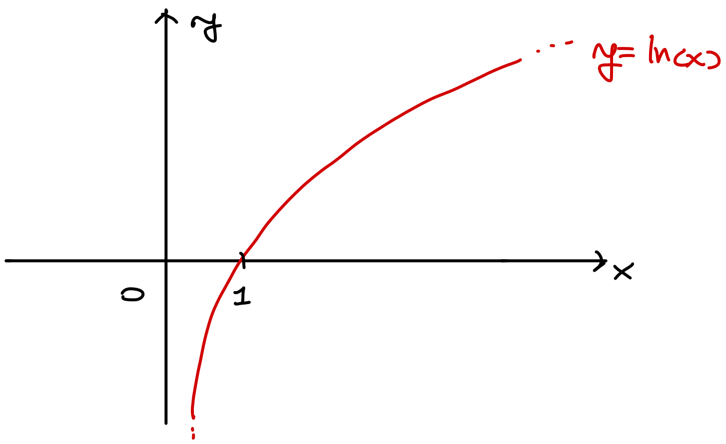
$$f(x) = \ln(x) \quad \text{(LOGARITMO NATURALE)}$$

Il dominio di f è

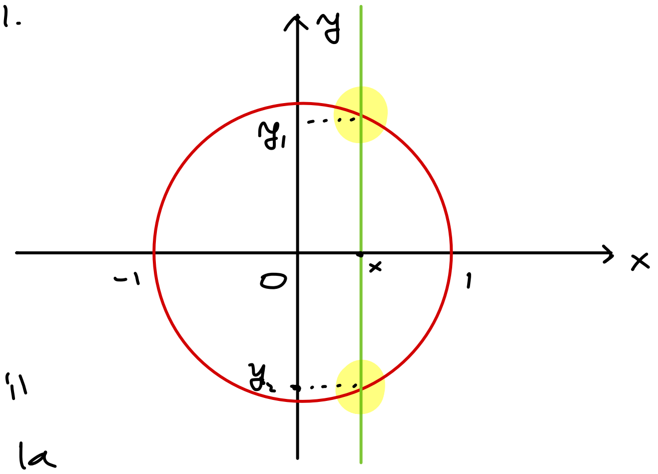
$$D = (0, +\infty) = \mathbb{R}^+.$$

Infatti, il logaritmo è definito solo per ARGOMENTO > 0.

Si ha che $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}$, quindi f suriettiva.



(3) Consideriamo la circonferenza di centro $O(0,0)$ e raggio 1, che ha equazione $x^2+y^2=1$.



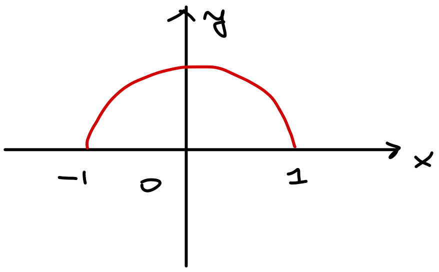
Questa curva non è il grafico di una funzione. Come lo capisco?

Se fosse una funzione, a ogni x associerebbe un'unica y.

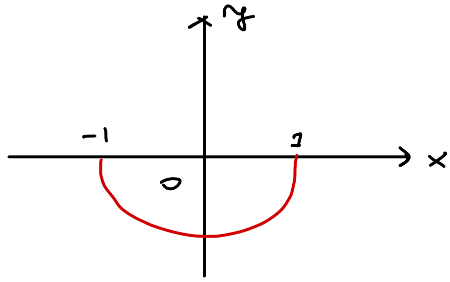
Allora si tracciano rette verticali: se tutte le rette verticali incontrano il grafico un'unica volta, allora la curva è il grafico di una funzione. Ma se c'è almeno una retta che incontra il grafico 2 o più volte, allora la curva non è il grafico di una funzione.

La circonferenza non è quindi il grafico di una funzione!

Se però elimino una delle due semicirconferenze, allora ho il grafico di una funzione:



$y=\sqrt{1-x^2}$



$y=-\sqrt{1-x^2}$

SONO FUNZIONI

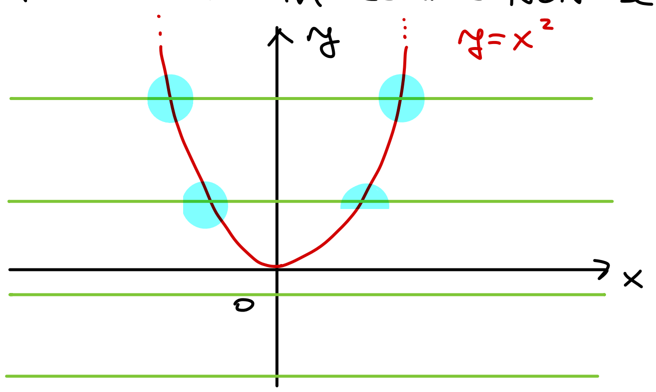
Dedurre iniettività e suriettività dal grafico

Ricordiamo che $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è **iniettiva** se ogni $y \in \mathbb{R}$ è immagine **AL MASSIMO** di una $x \in D$.

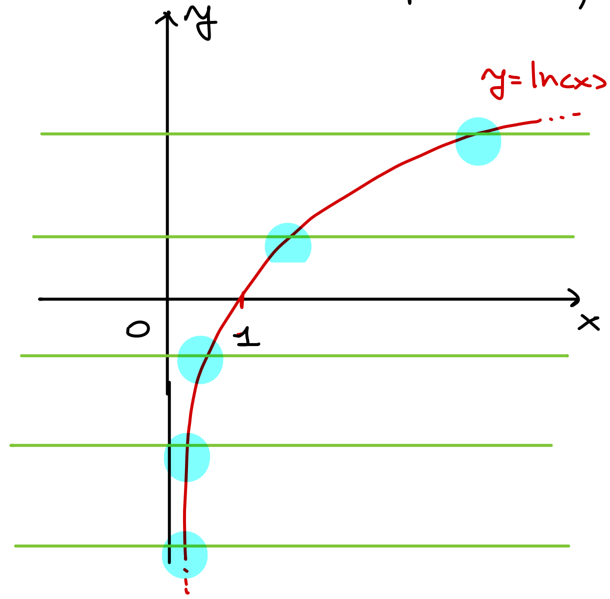
o 0 oppure 1

Per capire se una funzione è iniettiva, conoscendone il grafico, si tracciano idealmente delle rette orizzontali (cioè parallele all'asse x) $y = k$ e si conta il numero di intersezioni di ogni retta con il grafico:

- se ogni retta incontra il grafico **zero oppure una volta**, allora la funzione in esame è iniettiva;
- se c'è almeno una retta che incontra il grafico 2 o più volte, la funzione in esame NON è iniettiva.



Tutte le rette $y = k$ con $k > 0$ (cioè le rette parallele all'asse x ma sopra di esso) intersecano il grafico di $f(x) = x^2$ 2 VOLTE.
Quindi $f(x) = x^2$ <u>NON</u> è iniettiva.

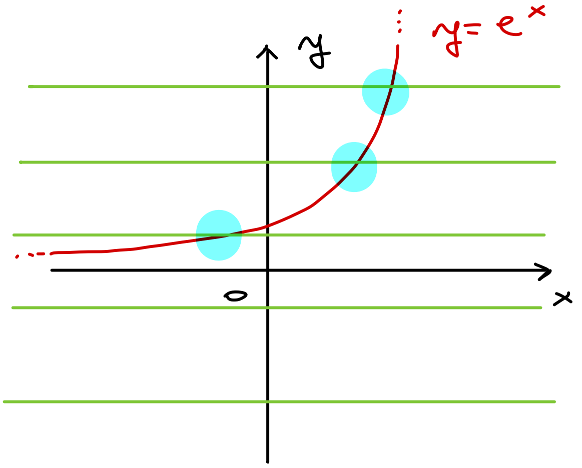


Tutte le rette $y = k$ incontrano il grafico di $f(x) = \ln(x)$ una sola volta. Quindi $f(x) = \ln(x)$ è iniettiva.

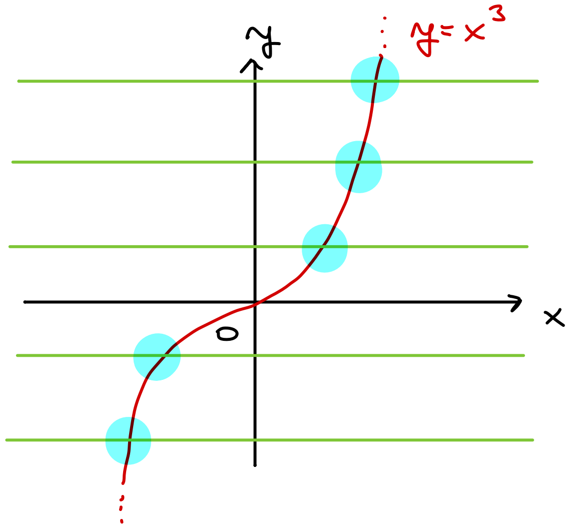
Ricordiamo invece che $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ è **suriettiva** se ogni $y \in \mathbb{R}$ è immagine di $\underbrace{\text{ALMENO}}_{1 \text{ o più}}$ una $x \in D$, cioè se $f(D) = \mathbb{R}$.

Per capire se una funzione è suriettiva, conoscendone il grafico, si tracciano idealmente delle rette parallele all'asse x (equazione $y=k$) e si conta il numero di intersezioni di ogni retta con il grafico:

- se ogni retta incontra il grafico **almeno una volta**, allora la funzione in esame è suriettiva;
- se c'è almeno una retta che <u>non</u> incontra mai il grafico, allora la funzione NON è suriettiva.



Le rette $y=k$ per $k \leq 0$ NON incontrano il grafico di $f(x) = e^x$.
Quindi $f(x) = e^x$ NON è suriettiva.



Tutte le rette $y=k$ incontrano il grafico di $f(x) = x^3$.
Quindi $f(x) = x^3$ è suriettiva.

OPERAZIONI TRA FUNZIONI

Consideriamo due funzioni $f: D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g: D_g \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora per ogni $x \in D_f \cap D_g$ definiamo le operazioni di:

- somma: $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$,
- prodotto: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$,
- rapporto $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ se $g(x) \neq 0$.

Un'altra operazione tra funzione è la seguente:

Def: Siano $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Definiamo la composizione in questo modo:

- se $g(D_g) \subseteq D_f$, allora

$$f \circ g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \boxed{(f \circ g)(x) := f(g(x))},$$

- se $f(D_f) \subseteq D_g$, allora

$$g \circ f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \boxed{(g \circ f)(x) := g(f(x))}.$$

N.B: la composizione di funzioni NON è commutativa, cioè

$$f \circ g \neq g \circ f$$

Esempio 1: consideriamo

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 \qquad D_f = \mathbb{R}$$

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x \qquad D_g = \mathbb{R}$$

Vediamone le immagini:

$$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+_0 = [0, +\infty)$$

$$g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$$ perché $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ($\nexists x \in \mathbb{R} : e^x \leq 0$)

Posso fare $f \circ g$? Serve che $\underset{(0,+\infty)}{g(D_g)} \subseteq D_f = \mathbb{R}$

Poiché $(0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$,

esiste $f \circ g$.

Allora calcoliamo $f \circ g$:

$\forall x \in D_g \quad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(g(x)) = (g(x))^2 = (e^x)^2$

$$= e^{x \cdot 2} = e^{2x}$$

$\Rightarrow f \circ g : D_g = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \boxed{(f \circ g)(x) = e^{2x}}$

Posso fare $g \circ f$? Serve che $f(D_f) \subseteq D_g = \mathbb{R}$.

$\underset{[0,+\infty)}{\overset{\shortparallel}{f(D_f)}}$

Poiché $[0,+\infty) \subseteq \mathbb{R}$,

$g \circ f$ esiste.

Calcoliamo $g \circ f$:

$\forall x \in D_f = \mathbb{R}$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)} = e^{x^2}$

$\Rightarrow g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \boxed{(g \circ f)(x) = e^{x^2}}$.

Esempio 2: consideriamo le funzioni

$f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(x) \qquad D_f = (0,+\infty)$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3 \qquad D_g = \mathbb{R}$

Inoltre, $f(D_f) = \mathbb{R}$ e $g(D_g) = \mathbb{R}$.

Posso fare $g \circ f$? Serve che $f(D_f) \subseteq D_g$.

$\underset{\mathbb{R}}{\overset{\shortparallel}{f(D_f)}} \subseteq \underset{\mathbb{R}}{\overset{\shortparallel}{D_g}}$

Poiché $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$, allora

$g \circ f$ esiste.

Calcoliamo $g \circ f$:

$\forall x \in D_f = (0,+\infty)$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^3 = (\ln(x))^3 = \ln^3(x)$.

Quindi

$g \circ f : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \boxed{(g \circ f)(x) = \ln^3(x)}$

si può fare $f \circ g$? serve che $\underset{\mathbb{R}}{g(D_g)} \subseteq \underset{(0,+\infty)}{D_f}$.

Ma $\mathbb{R} \not\subseteq (0,+\infty)$

cioè $g(D_g) \not\subseteq D_f$ e quindi la composizione $f \circ g$ NON esiste!

Def: sia $f: D_f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che f è invertibile se esiste una funzione $g: D_g \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

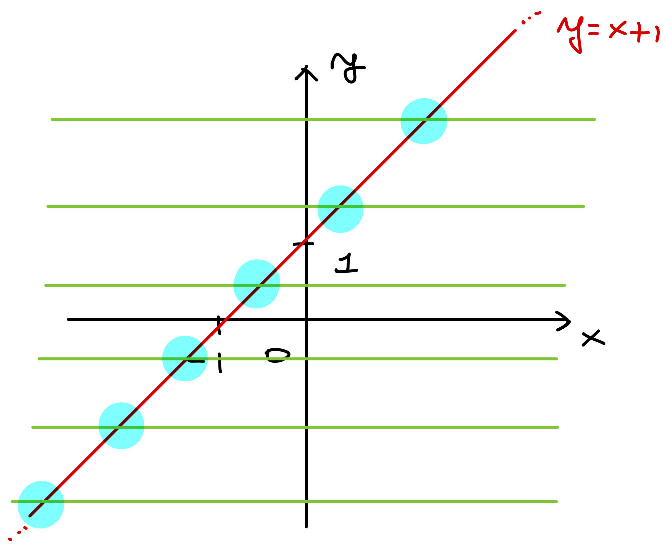
$$\boxed{(f \circ g)(x) = x \quad \forall x \in D_g \quad e \quad (g \circ f)(x) = x \quad \forall x \in D_f}.$$

In tal caso la funzione g si chiama funzione inversa di f e si indica con $g = f^{-1}$.

Teorema: una funzione è invertibile se e solo se ($\Longleftrightarrow$) è biiettiva.

Esempio 3: consideriamo la funzione

$$f(x) = x+1.$$



Tracciamo delle rette parallele all'asse x e osserviamo che:

- ognuna di queste interseca il grafico di $f \Longrightarrow f$ suriettiva
- ognuna di queste interseca il grafico di f una sola volta $\Longrightarrow f$ iniettiva

Allora f è biiettiva, quindi invertibile.

In questo caso semplice l'inversa si può trovare "a mano" così:

$$y = x+1 \longrightarrow y-1 = x \longrightarrow x = y-1 \longrightarrow \boxed{g(x) = x-1}$$ inversa di f

Notiamo infatti che

$f \circ g$ esiste perché $g(D_g) = \mathbb{R}$, $D_f = \mathbb{R}$

e $\forall x \in \mathbb{R}$

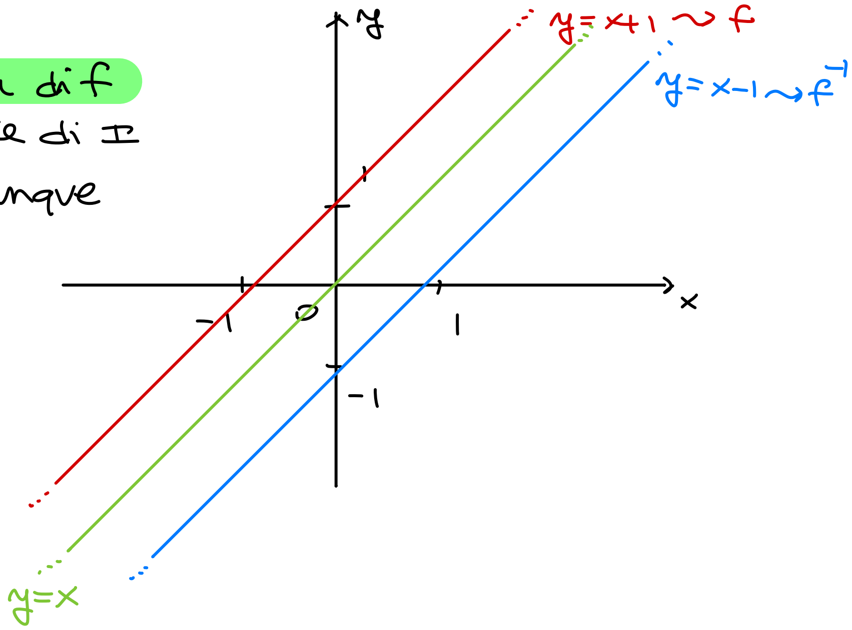
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \overset{f(x)=x+1}{=} g(x)+1 \overset{g(x)=x-1}{=} x-1+1 = x.$$

Analogamente $g \circ f$ esiste e $\forall x \in \mathbb{R}$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x)-1 = x+1-1 = x.$$

$$\left.\right\} \quad g = f^{-1}, \quad f^{-1}(x) = x-1$$

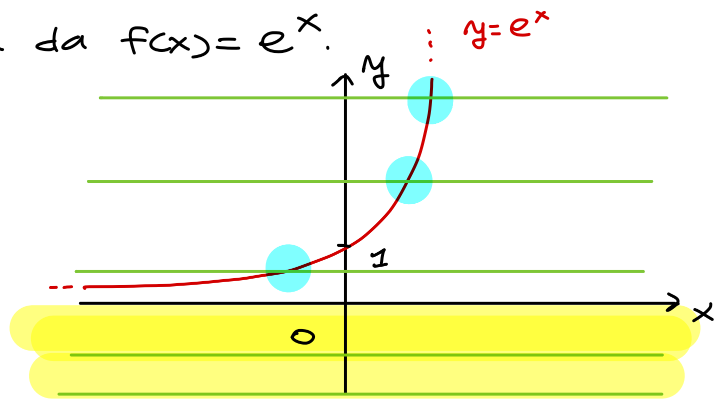
Dal punto di vista di grafico, la funzione f^{-1} è la simmetrica di f rispetto alla retta $y=x$ (bisettrice di I e IV quadrante), sempre, qualunque sia f.



Esempio 4: sia $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x)=e^x$.

Ogni retta orizzontale, cioè di equazione $y=k$, incontra il grafico

- 1 volta se $k>0$
- 0 volte se $k\leq 0$



Allora $f(x)=e^x$ è iniettiva, ma non suriettiva. Quindi non è biiettiva e di conseguenza nemmeno invertibile.

La funzione considerata non è suriettiva perché

$$\underbrace{f(\mathbb{R})=\mathbb{R}^+}_{\text{IMMAGINE}} \neq \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{CODOMINIO}}.$$

Se però scelgo la funzione $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ data da $f(x)=e^x$, questa È SURIETTIVA, perché $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}^+$, cioè

IMMAGINE = CODOMINIO.

In questo modo f è biiettiva e quindi invertibile.

La sua inversa $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ è

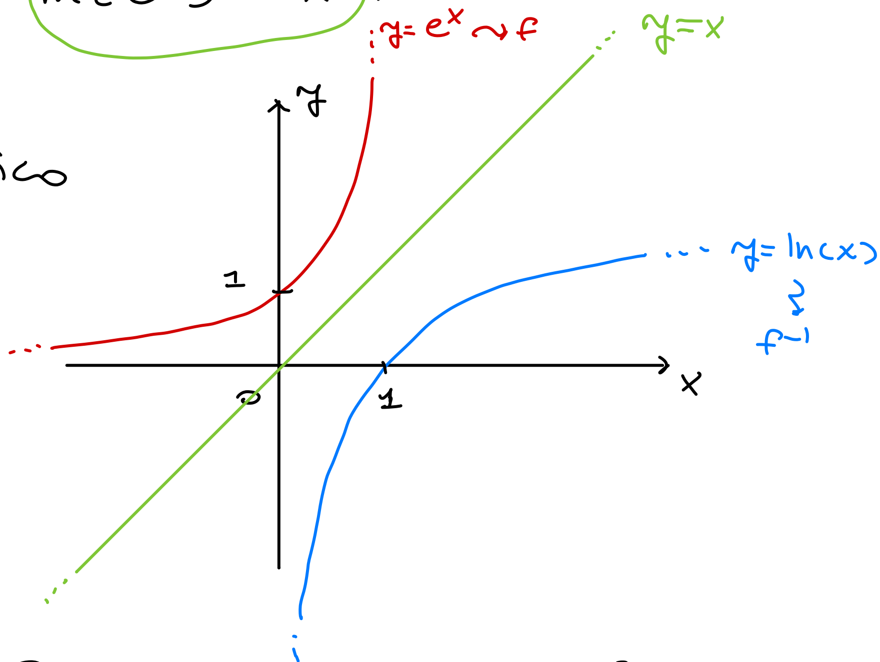
$$\boxed{f^{-1}(x) = \ln(x)}$$

Infatti,

- $f \circ f^{-1}$ è definita perché $f^{-1}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R} = D_f$.
  Allora $\forall x \in D_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$ (quindi $\forall x > 0$)
  $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = e^{f^{-1}(x)} = e^{\ln(x)} = x$

- $f^{-1} \circ f$ è definita perché $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ = D_{f^{-1}}$
  Allora $\forall x \in D_f = \mathbb{R}$
  $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \ln(e^x) = x$.

Dal punto di vista grafico, il grafico di f^{-1} è il simmetrico di f rispetto alla retta $y = x$.

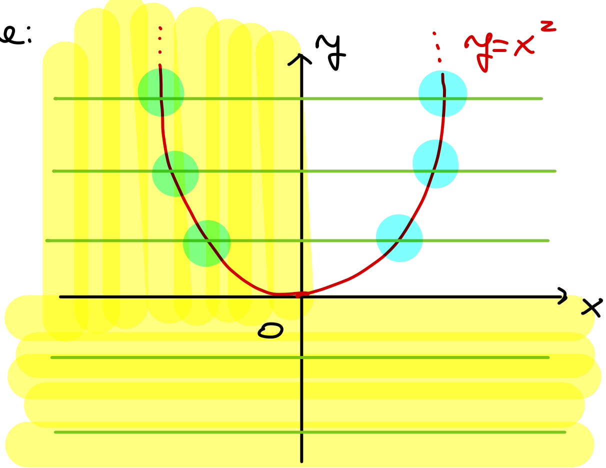


Esempio 5: consideriamo $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$.

Tracciando le rette $y = k$ notiamo che:

- $y = k$ per $k > 0$ interseca il grafico 2 volte
  $\Longrightarrow f(x) = x^2$ NON iniettiva

- $y = k$ per $k < 0$ non interseca mai il grafico
  $\Longrightarrow f(x) = x^2$ NON suriettiva.



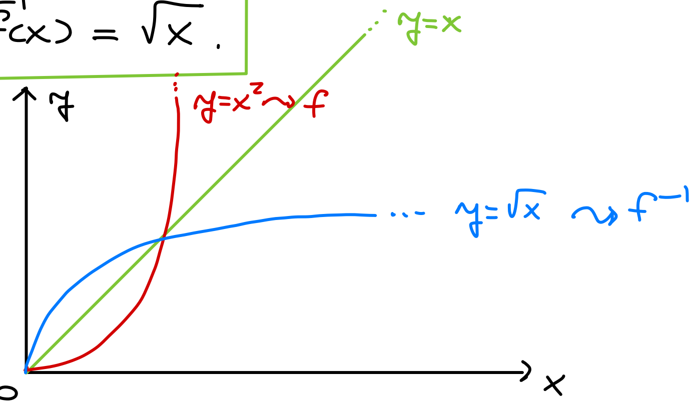
Come nell'esempio precedente restringendo il codominio di f alla sua immagine $\mathbb{R}^+_0 = [0, +\infty)$, allora f diventa suriettiva (ma non iniettiva). Restringendo invece il dominio di f a $\mathbb{R}^+_0$, allora questa diventa anche iniettiva.

Allora la funzione

$$f: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad , \quad f(x) = x^2$$

è sia iniettiva che suriettiva, cioè biiettiva e quindi invertibile.
La sua inversa è

$$\boxed{f^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad , \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}\,.}$$



Infatti:

- $f \circ f^{-1}$ è definita $\forall x \in D_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$ (quindi $\forall x \geq 0$) si ha che

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = (f^{-1}(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x.$$

- $f^{-1} \circ f$ è definita e $\forall x \geq 0$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x \quad (\text{perché } x \geq 0).$$

N.B: in generale, se $x \in \mathbb{R}$, non è vero che $\sqrt{x^2} = x$, ma è vero solo se $x \geq 0$.

Infatti $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$ (cioè se $x=-2$, allora $\sqrt{x^2} \neq x$).

In realtà,

$$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$$

dove

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x\,; & \text{se } x \geq 0 \\ -x\,; & \text{se } x < 0 \end{cases}}$$

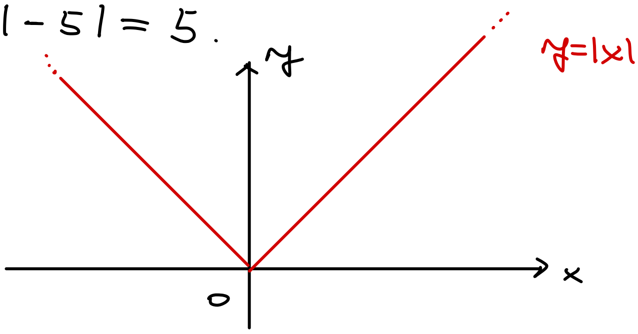
MODULO / VALORE ASSOLUTO DI X

Ad esempio, $|4| = 4$, $|0| = 0$, $|-5| = 5$.

Infatti $\sqrt{(-2)^2} = 2 = |-2|$.

La funzione valore assoluto di x

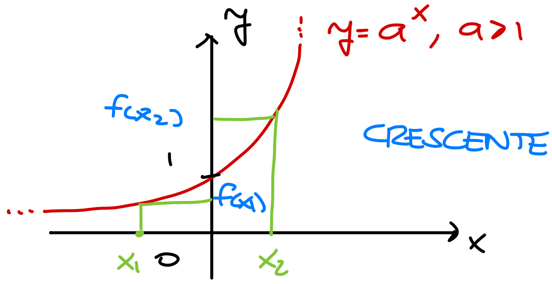
$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|$$



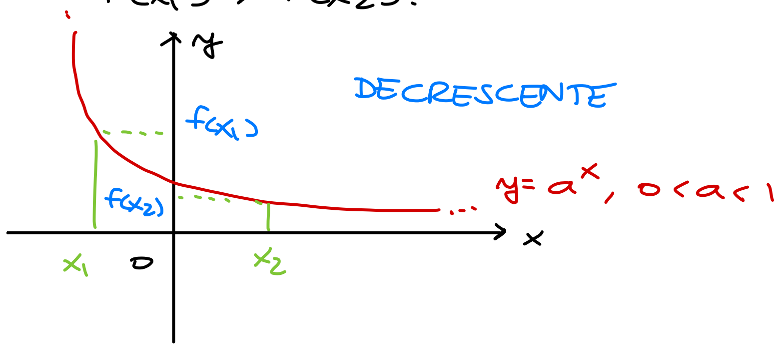
Funzioni crescenti e decrescenti

Def: Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che:

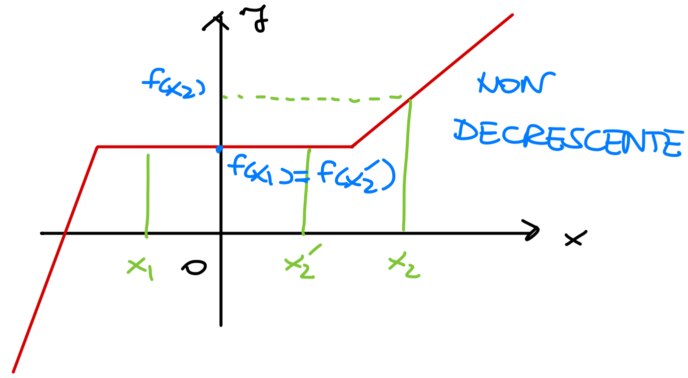
- f è **(strettamente) crescente** se $\forall x_1, x_2 \in D$ si ha che se $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) < f(x_2)$.



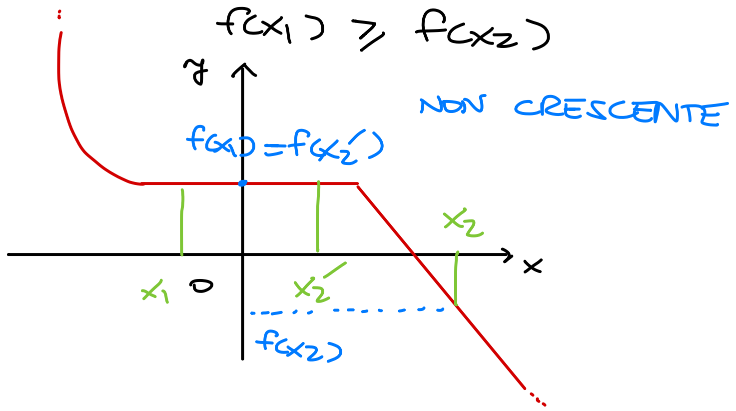
- f è **(strettamente) decrescente** se $\forall x_1, x_2 \in D$ si ha che $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) > f(x_2)$.



- f è **non decrescente** se $\forall x_1, x_2 \in D$ si ha che se $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) \leq f(x_2)$



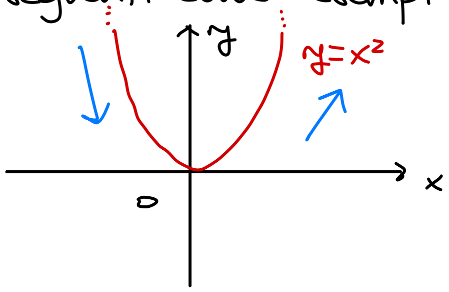
- f **non crescente** se $\forall x_1, x_2 \in D$ si ha che se $x_1 < x_2$, allora $f(x_1) \geq f(x_2)$

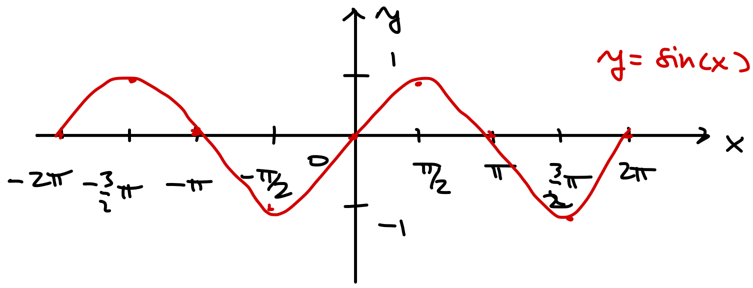


- f è **costante** se $\forall x_1, x_2 \in D$ si ha $f(x_1) = f(x_2)$.
  Le funzioni costanti sono tutte e sole le rette $y = k$

- f è **monotona** se ha lo stesso tipo di crescenza in tutto D.
  (decrescenza)

I seguenti sono esempi di funzioni NON monotone:

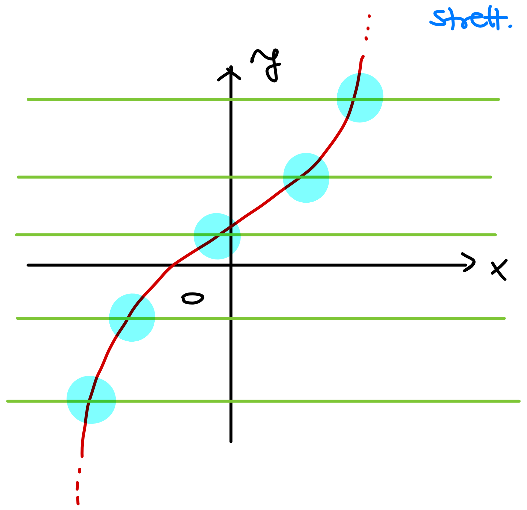


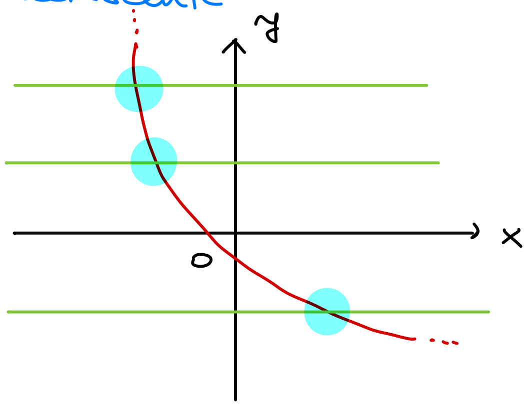


Non monotona in $D = \mathbb{R}$, perché è decrescente per $x < 0$ ed è crescente per $x > 0$.

Non monotona in $D = \mathbb{R}$, perché cresce negli intervalli $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ e decresce negli intervalli $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$

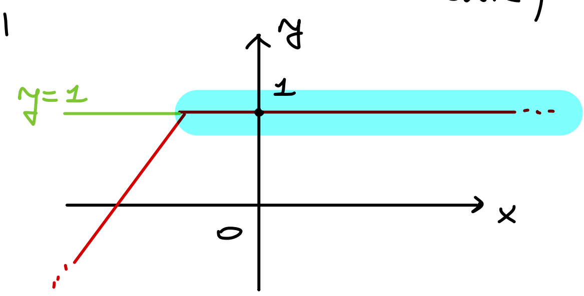
Teorema. ogni funzione $\underbrace{\text{strettamente monotona}}_{\text{strett. crescente / decrescente}}$ è iniettiva.





Questo teorema non vale se la monotonia non è stretta!

Consideriamo ad esempio una funzione monotona non decrescente, come in figura: la retta di equazione $y=1$ interseca il grafico della funzione in INFINITI PUNTI, quindi la funzione considerata <u>non</u> è iniettiva.



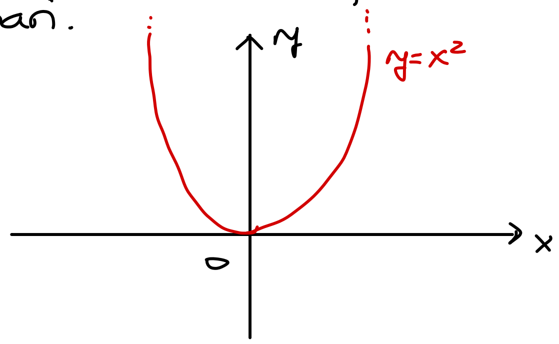
Funzioni pari e dispari

Def: sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Diremo che

- f è **pari** se $\forall x, -x \in D$ si ha $f(-x) = f(x)$,
- f è **dispari** se $\forall x, -x \in D$ si ha $f(-x) = -f(x)$,
- f **non è né pari, né dispari** altrimenti.

Graficamente:

- una funzione è pari se il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse y. Ad esempio, $f(x) = x^2$ è pari.

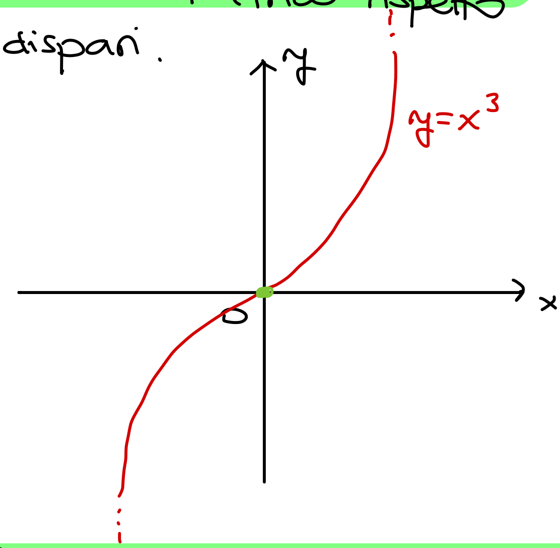


Infatti,

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x).$$

Più in generale, $f(x) = x^n$ è pari quando n è pari.

- una funzione è dispari se il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine. Ad esempio, $f(x) = x^3$ è dispari.



Infatti,

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$$

Più in generale, $f(x) = x^n$ è dispari quando n è dispari.

N.B: ha senso chiedersi se f è pari o dispari solo se il suo dominio D è simmetrico rispetto a $x=0$, perché per verificarlo serve che per ogni $x \in D$ anche $-x \in D$. Ad esempio, $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$, non è né pari né dispari e non ha senso chiedersi se è pari o dispari perché qualunque $x \in D = (0,+\infty)$ non ha una corrispondente $-x \in D$.

Funzioni periodiche

Def: sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione e sia $T > 0$ tale che $x+T \in D$ $\forall x \in D$. Si dice che f è **periodica** se

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in D.$$

Il più piccolo $T>0$ per cui questa proprietà è vera si chiama **periodo di f**.

Esempi:

- $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \cos(x)$ funzioni periodiche di periodo $T = 2\pi$. Infatti

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x), \qquad \cos(x+2\pi) = \cos(x).$$

- $f(x) = tg(x)$ e $f(x) = cotg(x)$ sono funzioni periodiche di periodo $T = \pi$. Infatti

$$tg(x+\pi) = tg(x) \quad e \quad cotg(x+\pi) = cotg(x).$$

FUNZIONI ELEMENTARI

1) FUNZIONI POLINOMIALI

$$\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}$$

$\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

se $a_n \neq 0$, allora f è un polinomio di grado $n \in \mathbb{N}^+$.

Il dominio di una funzione polinomiale è sempre $D = \mathbb{R}$.

2) FUNZIONI RAZIONALI FRATTE

$$\boxed{f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{con } p, q \text{ polinomi}}$$

RAZIONALI ⇝ polinomi

Il dominio di queste funzioni sono le $x \in \mathbb{R}$ per cui il denominatore è DIVERSO da 0:

$$D = \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\}$$

$$f(x) = \frac{x^2+x-3}{x-1}$$

Denominatore

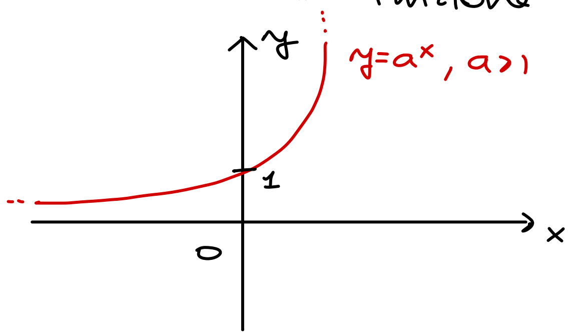
$$D = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

3) FUNZIONE ESPONENZIALE

$$\boxed{f(x) = a^x \quad \text{con} \quad a > 0 \quad e \quad a \neq 1}$$

Qualunque sia a, il dominio dell'esponenziale è $D = \mathbb{R}$.

CASO $a > 1$: in questo caso la funzione $f(x) = a^x$ è una funzione strettamente crescente.

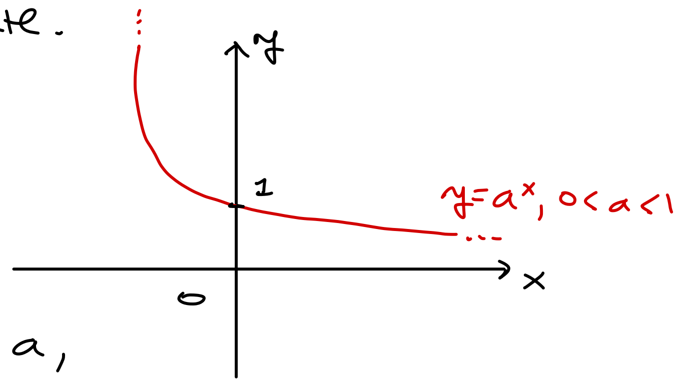


In questo caso rientra

$a = e$ $(= 2{,}718\ldots)$

(numero di Nepero)

CASO $0 < a < 1$: in questo caso la funzione $f(x) = a^x$ è una funzione strettamente decrescente.



In entrambi i casi, cioè qualunque sia a, $f(x) = a^x$ ha queste proprietà:

- sempre positiva, cioè $a^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$,
- non interseca mai l'asse x, cioè $a^x = 0 \ \nexists x \in \mathbb{R}$
- $a^0 = 1$
- non è pari, né dispari.

4) FUNZIONE LOGARITMO:

$$\boxed{f(x) = \log_a(x) \quad \text{con} \quad a > 0 \quad e \quad a \neq 1}$$

Il dominio del logaritmo è sempre ARGOMENTO > 0, cioè

$D = (0, +\infty) = \mathbb{R}^+$.

Per definizione, se $a>0$, $a\neq 1$ e $c>0$, si ha che

$$\boxed{\log_a(c) = b \iff a^b = c}.$$

$a =$ base del logaritmo
$c =$ argomento del logaritmo

In parole, il logaritmo in base a di c è l'esponente da dare ad a per ottenere c.

Ad esempio, poiché $2^3 = 8$ allora $3 = \log_2(8)$.

Se $a = e$ (numero di Nepero), $\log_e(x)$ si scrive $\ln(x)$ ed è detto logaritmo naturale.

Proprietà dei logaritmi

(i) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ (se $x, y > 0$)

(ii) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$ (se $x, y > 0$)

(iii) $\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)$ (se $x > 0$)

(iv) formula di cambiamento di base: per $a, b > 0$ e $a, b \neq 1$

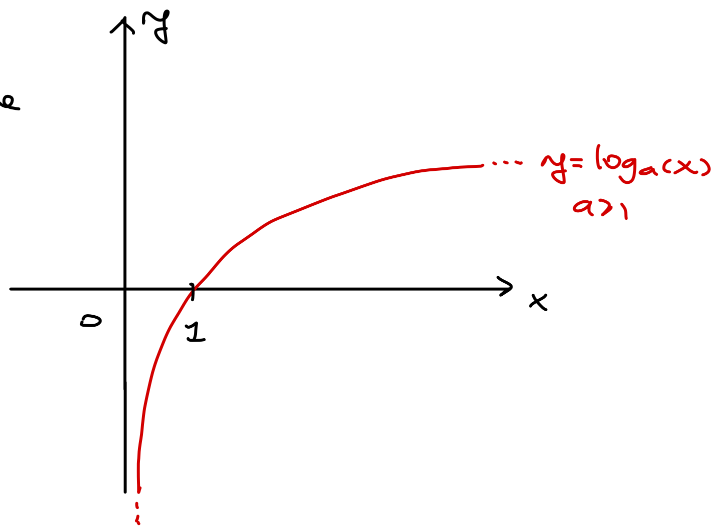
$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)} \quad (x>0).$$

Dal punto di vista analitico, cioè della funzione $f(x) = \log_a(x)$, sappiamo che:

- la funzione non è né pari, né dispari
- $\log_a(1) = 0$ (qualunque sia a)

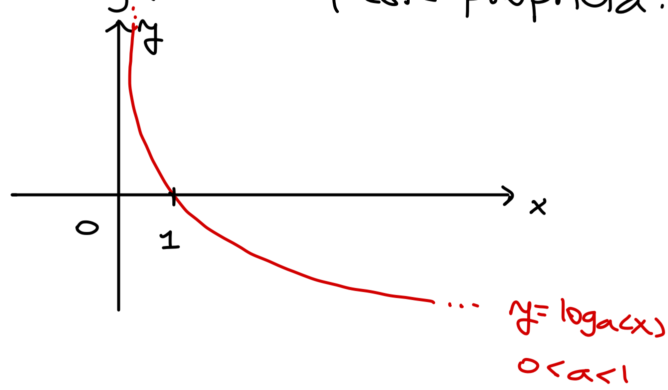
CASO $a>1$: per $a>1$ (e quindi anche per $a = e$) il logaritmo ha queste proprietà:

- è strettamente crescente
- $\log_a(x) > 0$ se $x > 1$
  $\log_a(x) < 0$ se $0 < x < 1$



CASO $0<a<1$: in questo la funzione $f(x) = \log_a(x)$ ha queste proprietà:

- è strettamente decrescente
- $\log_a(x) > 0$ se $0<x<1$
  $\log_a(x) < 0$ se $x>1$



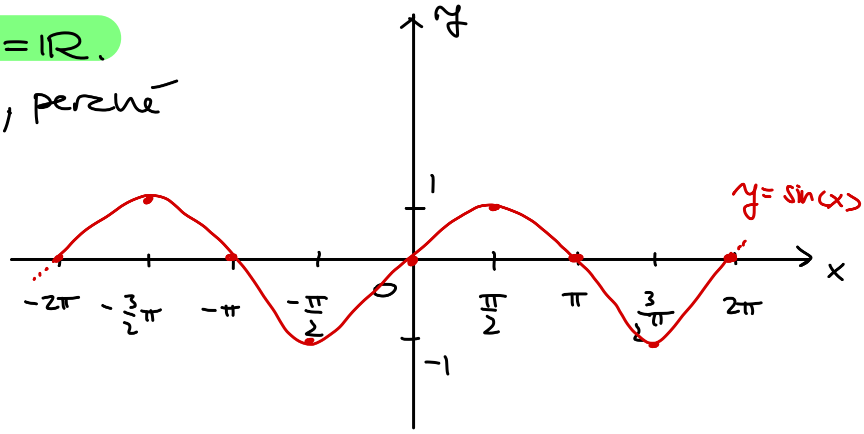
5) FUNZIONE SENO

$$\boxed{f(x) = \sin(x)}$$

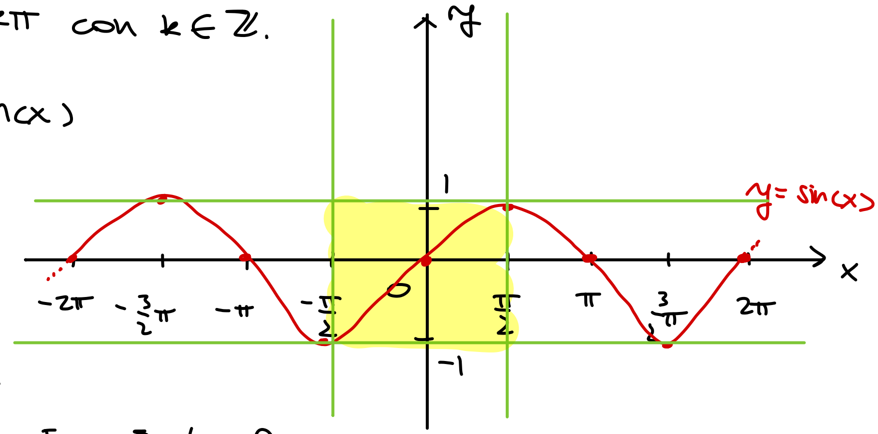
Il dominio del seno è $D = \mathbb{R}$.

La sua immagine è $[-1,1]$, perché
$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Ha le seguenti proprietà:



- è periodica di periodo $T = 2\pi$
- è dispari, cioè $\sin(-x) = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- Non è monotona
- è noto che
  - $\sin(x) = 0 \iff x = k\pi \quad$ con $k \in \mathbb{Z}$
  - $\sin(x) > 0 \iff 2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad$ con $k \in \mathbb{Z}$
  - $\sin(x) = 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad$ con $k \in \mathbb{Z}$
  - $\sin(x) = -1 \iff x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \quad$ con $k \in \mathbb{Z}$.



Siccome l'immagine di $f(x) = \sin(x)$ è $[-1,1] \neq \mathbb{R}$ (codominio), allora non è suriettiva. Non è nemmeno iniettiva, perché nessuna funzione periodica è iniettiva. Però:

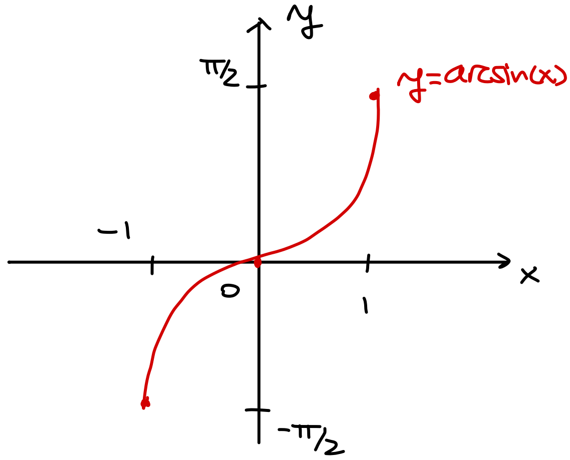
- restringendo il codominio a $[-1,1]$ la funzione diventa suriettiva;
- restringendo il dominio a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ la funzione diventa crescente, quindi iniettiva.

Quindi la funzione

$$\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]$$

è una funzione biettiva e quindi invertibile con inversa data dalla funzione arcoseno:

$$\arcsin: [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$



Questa funzione è:

- dispari
- crescente
- soddisfa

$\arcsin(0)=0$

$\arcsin(1)=\frac{\pi}{2}$

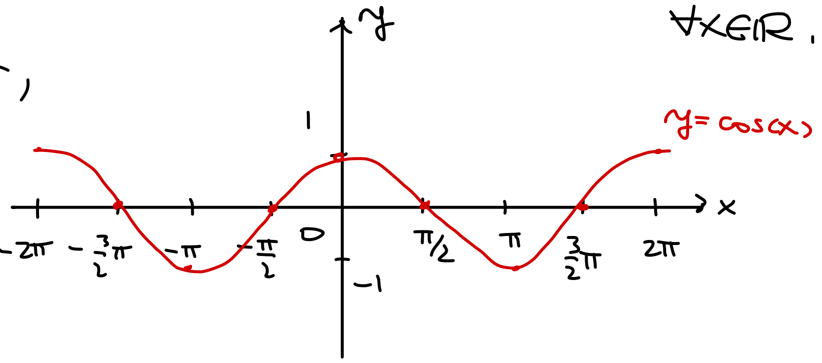
$\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$

6) FUNZIONE COSENO

$$\boxed{f(x)=\cos(x)}$$

Il suo dominio è $D=\mathbb{R}$ e l'immagine è $[-1,1]$, perché $-1\leq\cos(x)\leq 1$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ha le seguenti proprietà:



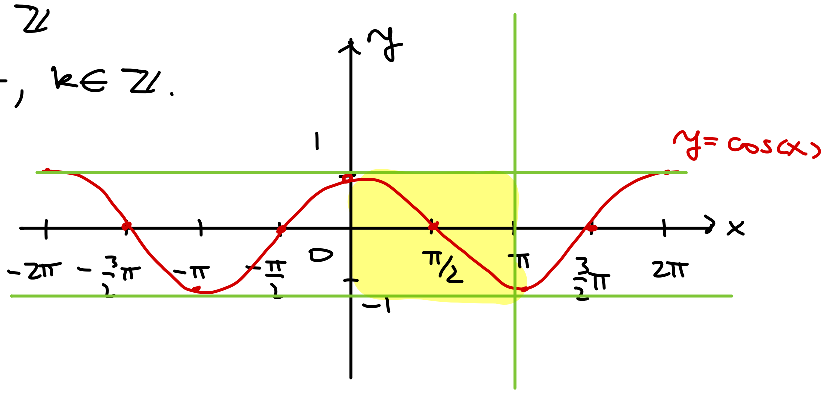
- è periodica di periodo $T=2\pi$,
- è pari: infatti

$\cos(-x)=\cos(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$

- NON è monotona
- è noto che:
  - $\cos(x)=0 \iff x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
  - $\cos(x)>0 \iff -\frac{\pi}{2}+2k\pi < x < \frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
  - $\cos(x)=1 \iff x=2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$
  - $\cos(x)=-1 \iff x=\pi+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

La funzione coseno non è né iniettiva, né suriettiva, ma lo diventa se

- restringo il codominio a $[-1,1]$,
- restringo il dominio a $[0,\pi]$.

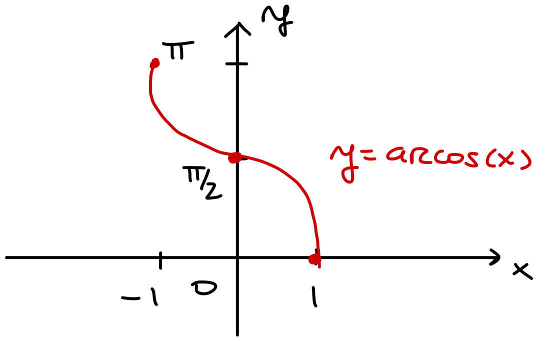


Allora la funzione

$$\cos : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$$

è biiettiva, quindi invertibile. La sua inversa è la funzione arcocoseno

$$\arccos . [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$



che ha le proprietà seguenti:

- è decrescente
- né pari, né dispari,
- si ha che

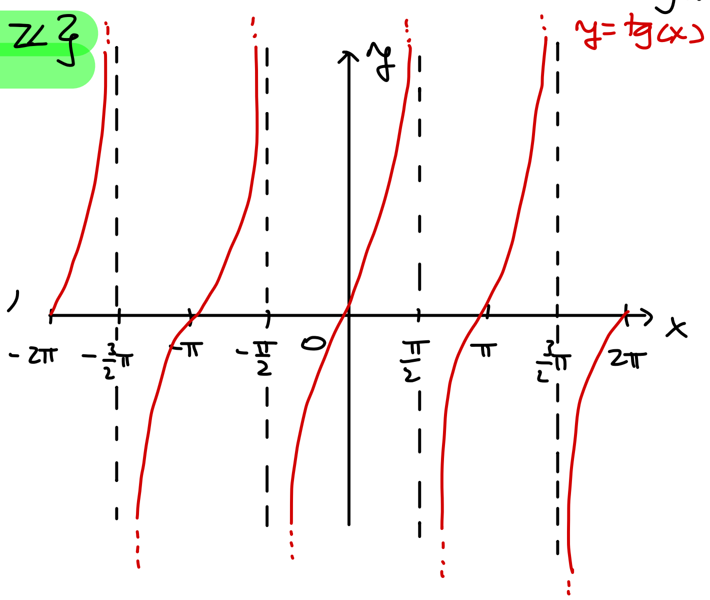
$$\arccos(1) = 0$$
$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$
$$\arccos(-1) = \pi.$$

7) FUNZIONE TANGENTE

$$\boxed{f(x) = tg(x)}$$

Ricordiamo che $tg(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$, quindi il codominio della funzione tangente è data dalle x per cui $\cos(x) \neq 0$. Quindi il dominio della funzione tangente è

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$



La funzione tangente ha queste proprietà:

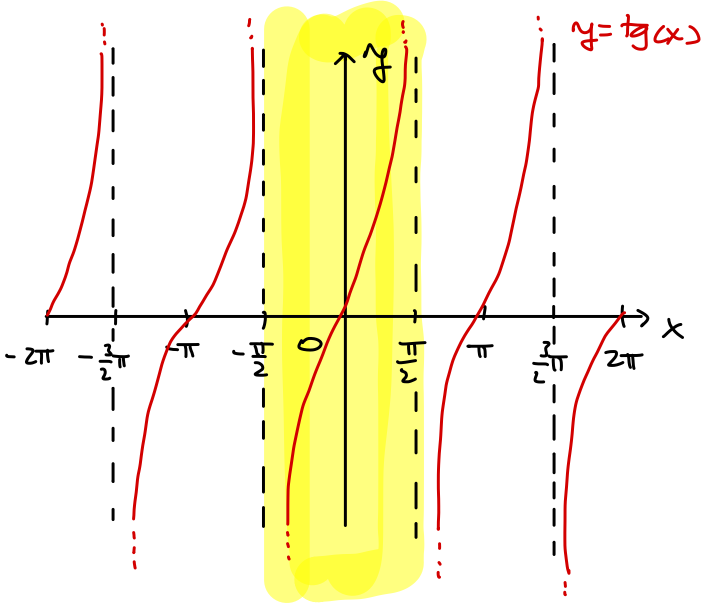
- è periodica di periodo $T = \pi$, perché $tg(x+\pi) = tg(x)$ $\forall x \in D$,
- è dispari perché $\forall x \in D$

$$tg(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$= -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -tg(x)$$

- è strettamente crescente in ognuno degli intervalli $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ per $k \in \mathbb{Z}$

La funzione tangente è suriettiva. Tuttavia non è iniettiva, perché è periodica: ogni retta orizzontale incontra il grafico infinite volte.

Per renderla iniettiva restringiamo il dominio a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$: in questo intervallo $f(x) = tg(x)$ è strettamente crescente, quindi iniettiva.



Segue che la funzione

$$tg: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \mathbb{R}$$

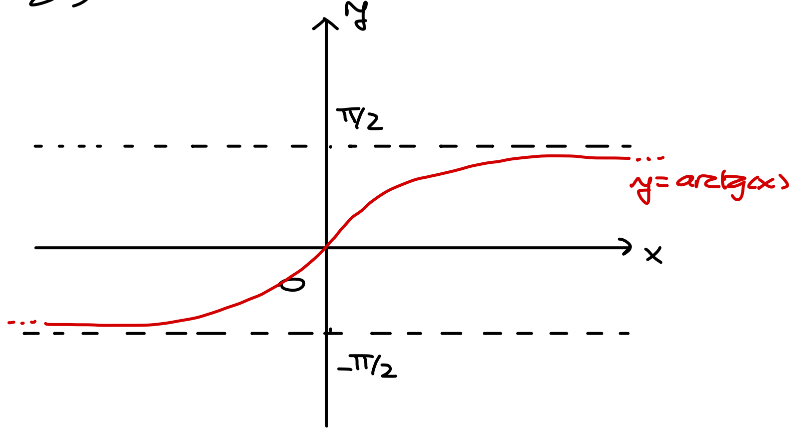
è biiettiva e quindi invertibile.

La sua inversa è la funzione arcotangente $f^{-1}(x) = arctg(x)$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Questa funzione è:

- crescente (strettamente) in $\mathbb{R}$,
- dispari



8) FUNZIONE RADICE

$$\boxed{f(x) = \sqrt[n]{x}} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}^+ \qquad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$

Distinguiamo due casi:

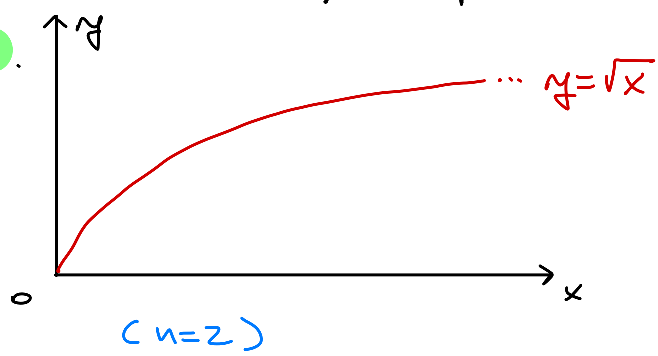
n PARI: $(\sqrt{x}, \sqrt[4]{x}, \dots)$. In questo caso il dominio è RADICANDO ≥ 0, quindi il dominio di $f(x) = \sqrt[n]{x}$ per n pari è

$$D = \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty).$$

L'immagine di f è $\mathbb{R}_0^+$, perché $\sqrt[n]{x} \geq 0 \quad \forall x \in D$.

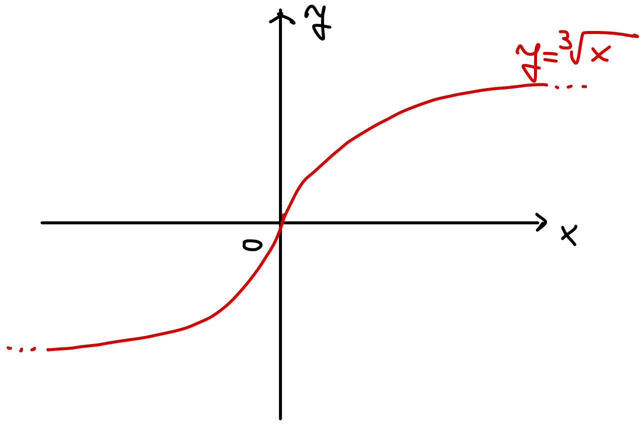
Inoltre, $\sqrt[n]{x} = 0 \iff x = 0$.

La funzione $f(x) = \sqrt[n]{x}$ è crescente.



n DISPARI: $(\sqrt[3]{x}, \sqrt[5]{x}, \dots)$. La radice di indice n dispari può avere qualsiasi radicando, quindi per $f(x)=\sqrt[n]{x}$ con n dispari si ha

$$D=\mathbb{R}.$$



$(n=3)$

La funzione $f(x)=\sqrt[n]{x}$ per n dispari ha le proprietà seguenti:

- è crescente
- è dispari: ad esempio se $n=3$
  $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$,
- la sua immagine è $\mathbb{R}$.

DOMINIO DI FUNZIONI COMPOSTE

Esercizio 1 Determinare il dominio di

$$f(x) = \sqrt{\ln(x-1)}.$$

Per trovare il dominio di f dobbiamo ricordarci che:

RADICE $\longrightarrow$ RADICANDO ≥ 0 $\longrightarrow$ $\boxed{\ln(x-1)\geq 0}$

LOGARITMO $\longrightarrow$ ARGOMENTO >0 $\longrightarrow$ $\boxed{x-1>0}$

Le due condizioni vanno soddisfatte contemporaneamente, cioè vanno messe a sistema. Quindi per determinare il dominio di f devo risolvere

$$\boxed{\begin{cases} \ln(x-1)\geq 0 & \text{I} \\ x-1>0 & \text{II} \end{cases}}$$

PASSO 1: risolviamo le due disequazioni singolarmente:

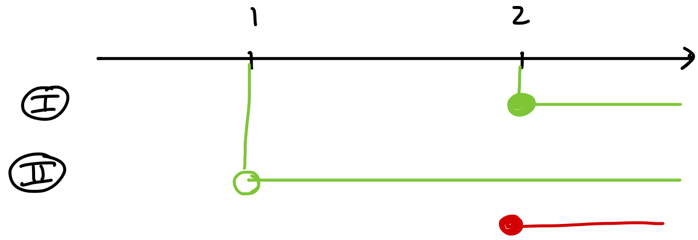
I $\ln(x-1)\geq 0 \longrightarrow \ln(x-1)\geq \ln(1) \longrightarrow x-1\geq 1$

$\longrightarrow \boxed{x\geq 2}$ soluzione di I

II $x-1>0 \longrightarrow \boxed{x>1}$ soluzione di II

PASSO 2: studiamo la LINEA DEL SISTEMA

(I) $x \geq 2$
(II) $x > 1$



Le soluzioni comuni a (I) e (II) sono $x \geq 2$. Quindi la soluzione del sistema è proprio $x \geq 2$. Quindi il dominio richiesto è proprio

$$\boxed{D = [2, +\infty)}$$

Esercizio 2 Determinare il dominio di

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{e^x - 1}.$$

FRAZIONE $\longrightarrow$ DENOMINATORE $\neq 0$ $\longrightarrow$ $\boxed{e^x - 1 \neq 0}$

ESPONENZIALE $\longrightarrow$ DOMINIO $= \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ NO PROBLEM!

RADICE CUBICA $\longrightarrow$ DOMINIO $= \mathbb{R}$ $\longrightarrow$ NO PROBLEM!

Quindi il dominio di f è dato dalle x per cui $e^x - 1 \neq 0$. Risolviamo

$$e^x - 1 \neq 0 \longrightarrow e^x \neq 1 \longrightarrow x \neq 0$$

Allora il dominio richiesto è dato dalle $x \neq 0$, cioè

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

Esercizio 3 Determinare il dominio di

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{x^2 - x - 2}}.$$

FRAZIONE $\longrightarrow$ DENOMINATORE $\neq 0 \longrightarrow \boxed{\sqrt{x^2-x-2} \neq 0}$

RADICE QUADRATA $\longrightarrow$ ARGOMENTO $\geq 0 \longrightarrow \boxed{x^2-x-2 \geq 0}$

SENO $\longrightarrow$ DOMINIO $= \mathbb{R} \longrightarrow$ NO PROBLEM!

Il dominio si determina risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-x-2} \neq 0 \\ x^2-x-2 \geq 0. \end{cases}$$

Dato che $\sqrt{g(x)} \neq 0 \iff g(x) \neq 0$, allora la prima equivale a

$$x^2 - x - 2 \neq 0,$$

cioè il sistema equivale a

$$\begin{cases} x^2-x-2 \neq 0 \\ x^2-x-2 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{x^2-x-2 > 0}$$

Quindi il dominio si trova risolvendo la disequazione riquadrata.
Risolviamo $x^2-x-2>0$: passiamo all'equazione associata e risolviamola

$$x^2-x-2=0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-2) = 1-(-8) = 1+8 = 9 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{+1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{DISEQUAZIONE } > 0 \\ \Delta > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ le soluzioni della disequazione sono date da

$$x < x_2 \ \vee \ x > x_1$$

cioè, nel nostro caso, le soluzioni di $x^2-x-2>0$ sono

$$x < -1 \ \vee \ x > 2.$$

Dunque il dominio cercato è $\boxed{D = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)}$

Esercizio 4 Data la seguente funzione si determinino: dominio, intersezione con gli assi, segno ed eventuali simmetrie. (= pari, dispari, né p. né d.)
Rappresentare queste informazioni nel piano cartesiano.

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-4}.$$

① DOMINIO: FRAZIONE $\longrightarrow x^2-4 \neq 0$

RADICE QUADRATA $\longrightarrow x^2-1 \geq 0$

Il dominio si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x^2-1 \geq 0 & \text{I} \\ x^2-4 \neq 0 & \text{II} \end{cases}$$

I $x^2-1 \geq 0$: passiamo all'equazione associata che è

$$x^2-1=0$$

$\longrightarrow x^2=1 \longrightarrow x=-1 \vee x=1$

Le soluzioni della disequazione $x^2-1 \geq 0$ sono

$\boxed{x \leq -1 \vee x \geq 1}$ soluzioni di I

$x = \pm 2$ ok
$x \neq \pm 2$ ok
$\left.\begin{array}{l} x \geq \pm 2 \\ x \leq \pm 2 \end{array}\right\}$ ERRORE

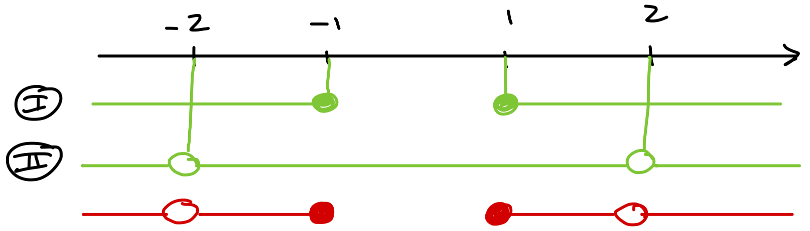
N.B: 1) È <u>sbagliatissimo</u> scrivere, come soluzione di $x^2-1 \geq 0$,

$$x \geq \pm 1$$

2) Se avessi avuto $x^2-1 \leq 0$, allora le soluzioni sarebbero state $-1 \leq x \leq 1$.

II $x^2-4 \neq 0 \longrightarrow x^2 \neq 4 \longrightarrow \boxed{x \neq \pm 2}$ soluzione di II

Adesso imposto la linea del sistema:



Le soluzioni del sistema sono date da $\boxed{x \leq -1 \vee x \geq 1 \text{ con } x \neq \pm 2}$.

Quindi

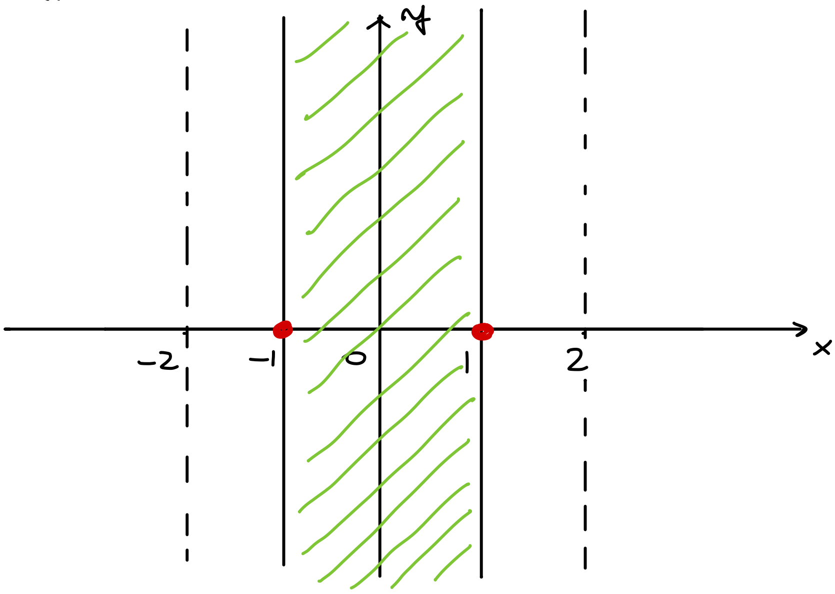
$$\boxed{D = (-\infty,-2) \cup (-2,-1] \cup [1,2) \cup (2,+\infty)}$$

Rappresentiamo il dominio nel piano cartesiano.
Il dominio è

$x \leq -1 \vee x \geq 1, \quad x \neq \pm 2,$

quindi la funzione non esiste tra -1 e 1 e posso cancellare questa parte.
Le rette $x=-1$ e $x=1$ fanno parte del dominio

$\longrightarrow$ LINEA CONTINUA



Invece $x=-2$ e $x=2$ non fanno parte del dominio

$\longrightarrow$ LINEA TRATTEGGIATA

(N.B: gli assi x e y non si tratteggiano mai)

② SIMMETRIE: vediamo se f è pari o dispari

$$f(-x) = \frac{\sqrt{(-x)^2-1}}{(-x)^2-4} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-4} = f(x)$$

$\Rightarrow$ f pari

③ INTERSEZIONE CON GLI ASSI

- le intersezioni con l'asse x si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} y=0 & \text{ASSE } x \\ y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-4} \end{cases} \longrightarrow \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-4} = 0 \longrightarrow \cancel{(x^2-4)}\frac{\sqrt{x^2-1}}{\cancel{x^2-4}} = \underbrace{0\cdot(x^2-4)}_{0}$$

sostituisco $y=0$ nella seconda

$$\longrightarrow \sqrt{x^2-1} = 0 \longrightarrow x^2-1=0 \longrightarrow x^2=1 \longrightarrow x=-1 \vee x=1$$

cioè il grafico di f passa per i punti $(-1,0)$ e $(1,0)$.

- l'intersezione con l'asse y si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x=0 & \text{ASSE } y \\ y = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-4} \end{cases} \longrightarrow$$

questo sistema non ha soluzioni perché l'asse y sta FUORI dal dominio D, quindi il grafico di f non interseca l'asse y.

④ **SEGNO:** dobbiamo risolvere la disequazione $f(x)>0$ cioè

$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-4}>0$$

Si studiano singolarmente segno del numeratore e del denominatore, poi si fa la linea del segno:

N: $\sqrt{x^2-1}>0 \quad \forall x \neq \pm 1$ perché la radice quando esiste (cioè nel dominio D) è sempre ≥ 0 ed è quindi >0 ovunque tranne che per $x=-1 \vee x=1$.

D: $x^2-4>0$. L'equazione associata è $x^2-4=0$, che ha soluzioni $x=-2 \vee x=2$, quindi

$$x^2-4>0 \longrightarrow x<-2 \vee x>2$$

Linea del segno.

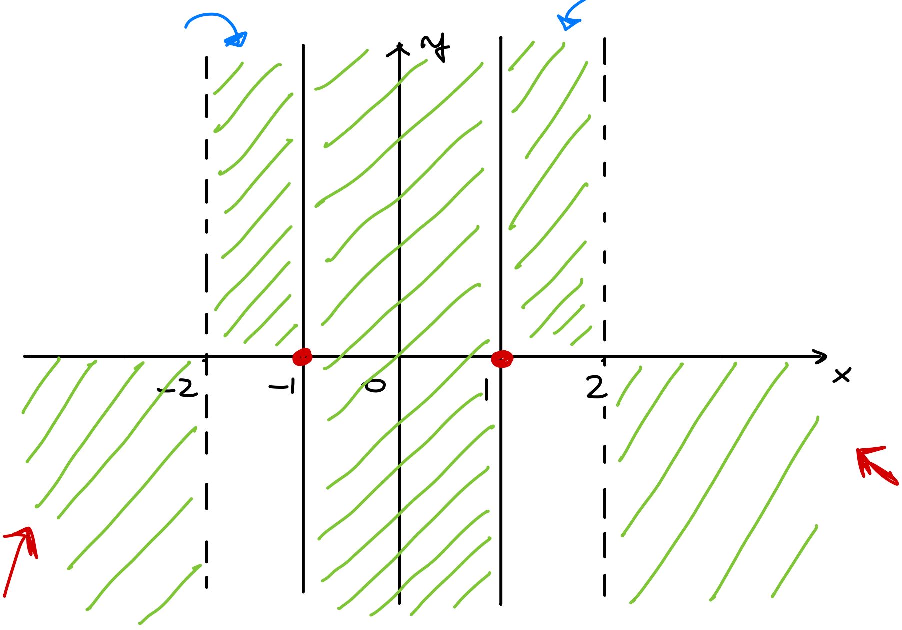
$$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-4}>0$$
$+$

		-2		-1	escluso dal dominio	1		2	
N	+		+		+		+		+
D	+		−		−		−		+
$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-4}$	+		−		−		−		+

Quindi $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-4}>0$ per $x<-2 \vee x>2$.

Ho provato che

- $f(x)>0$ per $x<-2 \vee x>2$: il grafico di f sta sempre sopra all'asse x se $x<-2 \vee x>2$, quindi cancello la relativa parte sotto l'asse x (↗)
- $f(x)<0$ per gli altri valori: cancello la parte sopra all'asse x per $-2<x<-1 \vee 1<x<2$. (↘)



Esercizio 5 Data la seguente funzione si determinino: dominio, intersezione con gli assi, segno ed eventuali simmetrie. (= pari, dispari, né p. né d.)
Rappresentare queste informazioni nel piano cartesiano.

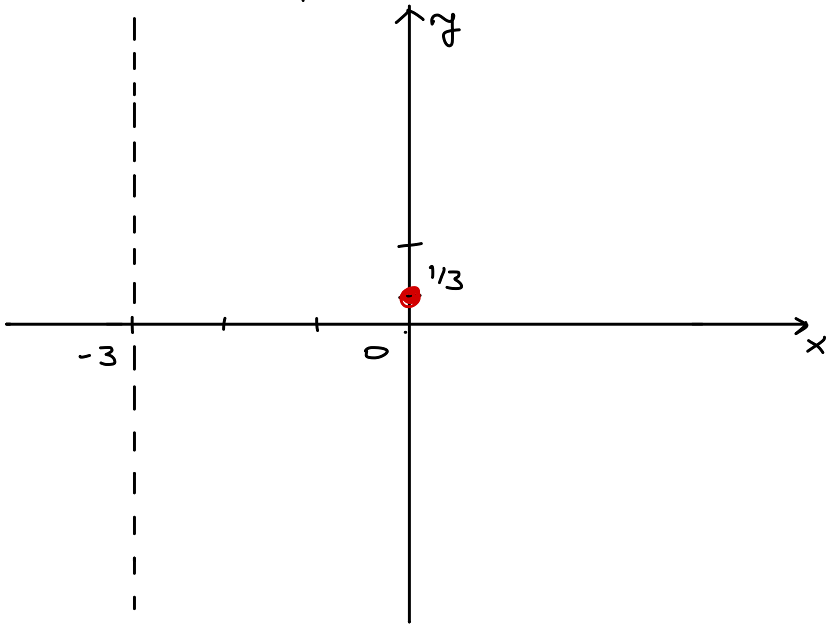
$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x+3}$$

① DOMINIO: essendo una funzione razionale fratta, basta porre

DENOMINATORE $\neq 0 \longrightarrow x+3 \neq 0 \longrightarrow x \neq -3$

quindi, $\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}.}$

(tratteggio la retta $x = -3$)



② SIMMETRIE:

Il dominio non è simmetrico rispetto allo 0, quindi posso subito concludere che f non è né pari, né dispari

③ INTERSEZIONI CON GLI ASSI

□ asse x: risolvo il sistema

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x+3} \end{cases} \longrightarrow \cancel{(x+3)} \frac{x^2 - x + 1}{\cancel{x+3}} = \underbrace{0 \cdot (x+3)}_{=0}$$

$$\longrightarrow x^2 - x + 1 = 0$$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0 \implies$ l'equazione $x^2 - x + 1 = 0$ non ammette soluzioni reali

$\implies$ non ci sono intersezioni con l'asse x

□ asse y: risolvo il sistema

al posto di x metto 0

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x+3} \end{cases} \longrightarrow y = \frac{(0)^2 - 0 + 1}{0+3} = \frac{1}{3}$$

$\implies$ il punto di intersezione con l'asse y è $(0, \frac{1}{3})$.

④ SEGNO: dobbiamo risolvere $f(x) > 0$, cioè

$$\frac{x^2-x+1}{x+3} > 0$$

N.B: mentre in un'equazione fratta posso cancellare il denominatore, in una DISEQUAZIONE non posso!

N: $x^2-x+1>0 \xrightarrow[\Delta<0]{} \forall x \in \mathbb{R}$

Ricordo che

$$\left.\begin{array}{l} \text{DISEQUAZIONE } >0 \\ \Delta<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ha soluzione } \forall x \in \mathbb{R}$$

D: $x+3>0 \longrightarrow x>-3$

Linea del segno:

	$x<-3$	-3	$x>-3$
N	+		+
D	−		+
$\frac{x^2-x+1}{x+3}$	−		+

Quindi $\frac{x^2-x+1}{x+3} > 0$ per $x>-3$, cioè $f(x)>0$ per $x>-3$ e $f(x)<0$ per $x<-3$.