CAPITOLO 2: SUCCESSIONI E LIMITI DI FUNZIONI

SUCCESSIONI

Le successioni sono funzioni il cui dominio D è l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ o un suo sottoinsieme infinito.

Def: una successione è una funzione $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ che a ogni numero naturale $n \in \mathbb{N}$ associa un numero reale $f(n) = a_n$.
Talvolta, anziché su tutto $\mathbb{N}$, una successione può essere definita a partire da un numero naturale $n_0 \in \mathbb{N}$ fissato, cioè

$$f: D = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dato che il dominio di una successione è costituito solo da numeri naturali, possiamo visualizzare tutti gli elementi della successione (contrariamente a quanto accade per le funzioni).
Ad esempio, sia $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f: n \longmapsto a_n = n^2.$$

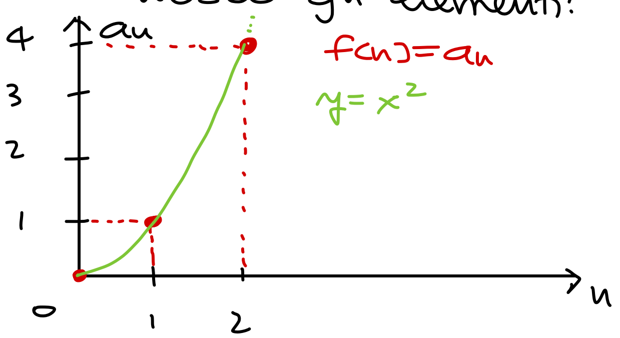
La posso rappresentare perché ne conosco gli elementi:

$n = 0 \longmapsto a_0 = 0^2 = 0$

$n = 1 \longmapsto a_1 = 1^2 = 1$

$n = 2 \longmapsto a_2 = 2^2 = 4$

$\vdots$



Poiché l'immagine di ogni n è scritta come a_n, per le successioni si preferisce la notazione seguente:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{oppure} \quad (a_n)_{n \geq n_0}$$

Se inoltre non sappiamo se $D = \mathbb{N}$ oppure no, ma è ininfluente per ciò che stiamo studiando, ci si può limitare a scrivere

$$(a_n)_n .$$

Dall'esempio visto sopra si evince che il grafico di una successione è costituito da soli punti del tipo (n, a_n), al variare di $n \in D$.

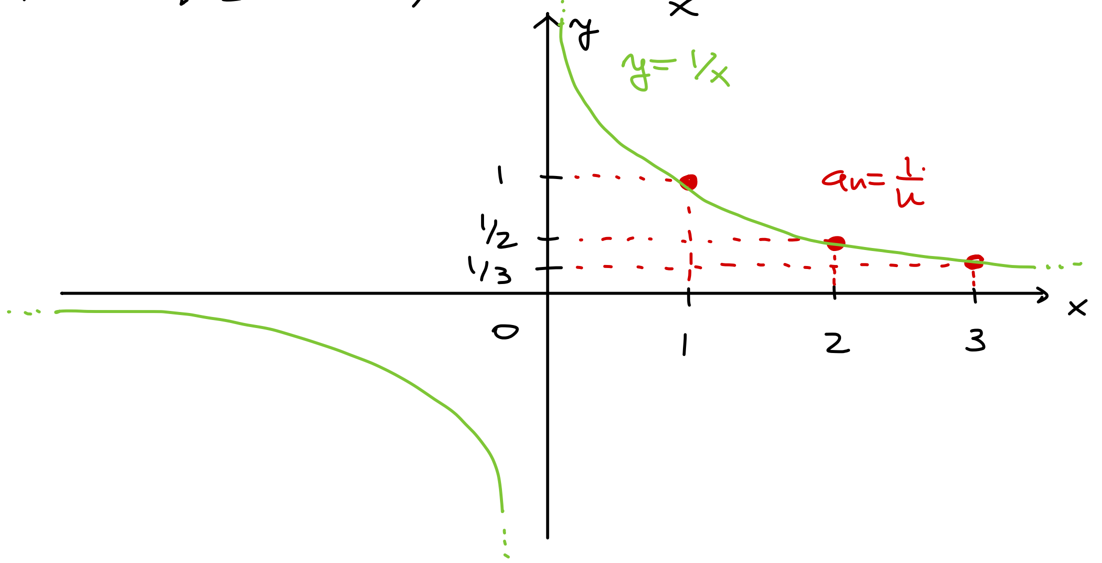
Esempio 1: consideriamo la successione

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1},$$

cioè quella data da $f: D=\{n\in\mathbb{N} : n\geq 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(n)=\frac{1}{n}$.

Confrontiamo il suo grafico con quello della funzione

$$f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x)=\frac{1}{x}.$$



- $n=0$ NON DEFINITA perché $\frac{1}{0}$ non ha senso
- $n=1 \longmapsto a_1=\frac{1}{1}=1$
- $n=2 \longmapsto a_2=\frac{1}{2}$
- $n=3 \longmapsto a_3=\frac{1}{3}$

Esempio 2: consideriamo la successione

$$\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

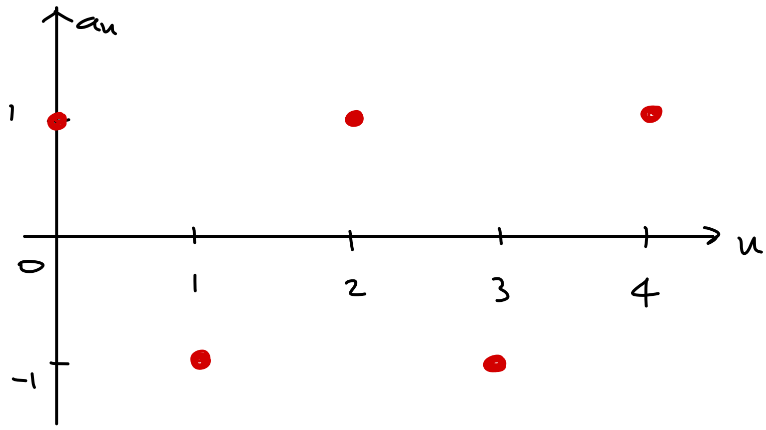
cioè data da $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(n)=(-1)^n$.

$n=0 \longmapsto a_0=(-1)^0=1$

$n=1 \longmapsto a_1=(-1)^1=-1$

$n=2 \longmapsto a_2=(-1)^2=1$

$n=3 \longmapsto a_3=(-1)^3=-1$



Riassumendo:

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \text{ pari} \\ -1, & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

In questo caso non c'è una funzione reale $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = (-1)^x.$$

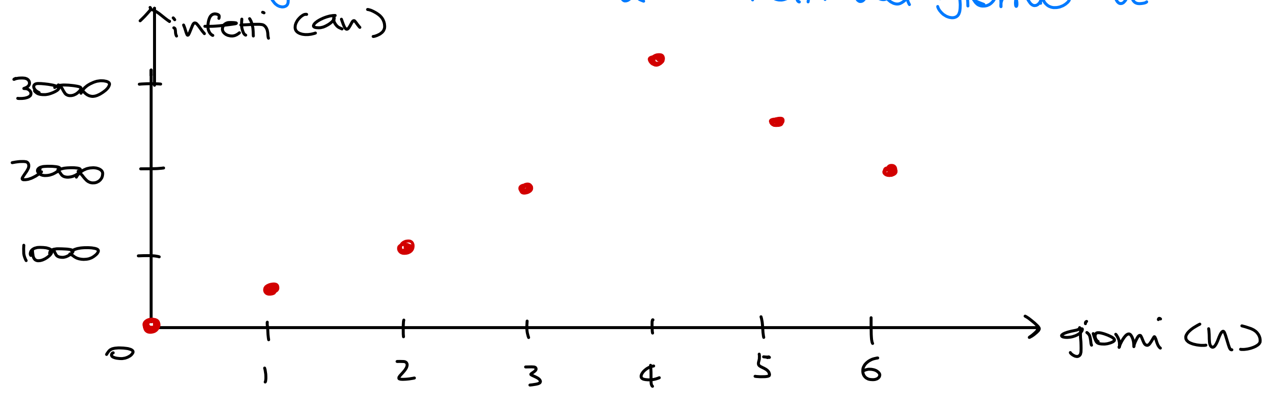
Un tale tipo di funzione non esiste, perché se l'esponente x è un numero NON intero la potenza si può definire solo con base positiva! Se invece l'esponente è un numero intero (in particolare naturale) la base può anche essere negativa.

Perché sono importanti le successioni nelle applicazioni?

Le successioni si prestano molto bene alla modellizzazione di fenomeni "discreti", ossia in cui la variabile indipendente x è un numero naturale.

Ad esempio, sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione che esprime il numero di soggetti infettati da un virus ogni giorno.

n = giorno $\qquad a_n$ = infetti nel giorno n



$n=0 \mapsto a_0 = 0$: il giorno 0 non ho infetti

$n=1 \mapsto a_1 = 400$. il primo giorno conto 400 infetti

$n=2 \mapsto a_2 = 1000$: il secondo giorno conto 1000 infetti

$\vdots$

Dal punto di vista applicativo è necessario saper rispondere alla domanda. "quanti saranno gli infetti tra molti giorni?".

Matematicamente, questa domanda equivale a chiedersi:

> "cosa succede alla successione $(a_n)_n$ quando n diventa molto grande?"

Per rispondere a questa domanda si deve calcolare il limite di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quando n tende a ∞, cioè $\lim_{n\to\infty} a_n$.

LIMITI DI SUCCESSIONI

Iniziamo introducendo un concetto preliminare:

Def: si dice che una successione $(a_n)_n$ soddisfa una certa proprietà P **definitivamente** se $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che a_n soddisfa P $\forall n \geq n_0$

DEFINITIVAMENTE = da un certo punto in poi

Ad esempio, per $a_n = n^2$ si può dire che

$a_n \geq 3$ definitivamente.

Infatti

- $n=0 \mapsto a_0 = 0 < 3$
- $n=1 \mapsto a_1 = 1 < 3$
- $n=2 \mapsto a_2 = 4 \geq 3$
- $n=3 \mapsto a_3 = 9 \geq 3$

$\vdots$

$$\Longrightarrow \forall n \geq \underset{n_0}{\overset{\shortparallel}{2}} \quad a_n \geq 3.$$

Introduciamo questa definizione:

Def: sia $(a_n)_n$ una successione e sia $\ell \in \mathbb{R}$. Diciamo che **la successione $(a_n)_n$ converge a ℓ**, e si scrive

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = \ell},$$

$\longleftarrow$ CONVERGE = ammette limite FINITO

se $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ |a_n - \ell| < \varepsilon \ \ \forall n \geq n_0.}$

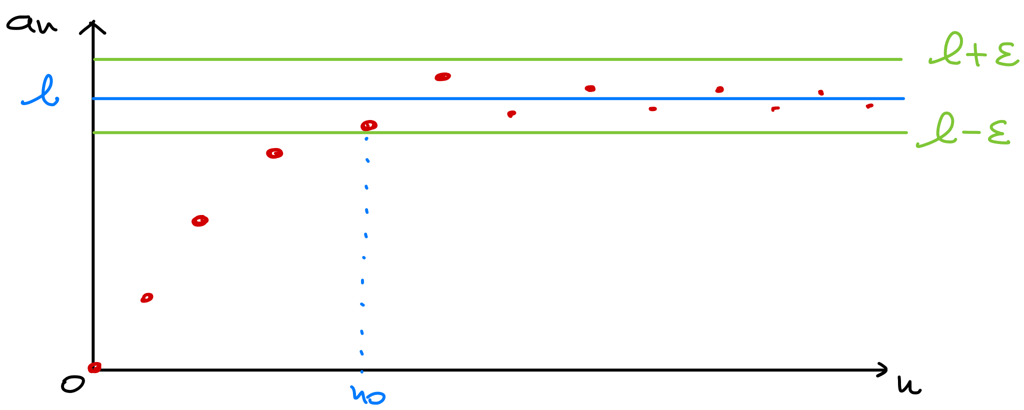
$\varepsilon > 0$ è arbitrariamente piccolo

Commento: il termine $|a_n - \ell|$ è la **distanza** del termine a_n da ℓ. Infatti, dire che $|a_n - \ell| < \varepsilon$ equivale a dire che

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \longrightarrow -\varepsilon < a_n - \ell < \varepsilon \longrightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon.$$

Quindi $(a_n)_n$ converge a ℓ se comunque prendo $\varepsilon > 0$ piccolo a piacere, trovo sempre $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che i termini a_n per $n \geq n_0$ sono compresi tra $\ell - \varepsilon$ ed $\ell + \varepsilon$, cioè la loro distanza da ℓ è minore di ε.

Quindi una successione che converge a ℓ, definitivamente è vicinissima al limite ℓ.



Fissato $\varepsilon>0$ trovo $n_0 \in \mathbb{N}$. Tutti i termini a_n per $n \geq n_0$ si trovano tra le due rette verdi, che rappresentano $\ell-\varepsilon$ e $\ell+\varepsilon$.

Esempio (verifica di un limite): verifichiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

utilizzando la definizione di successione convergente.
In questo contesto $a_n = \frac{1}{n}$ e $\ell = 0$.
Per verificare che il $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ dobbiamo far vedere che

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0.$$

Per farlo, si fissa $\varepsilon>0$ arbitrario. Poi si risolve la disequazione

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

e si spera di trovare un valore di n, che per noi sarà n_0, di modo che la disequazione abbia come soluzione $n \geq n_0$.
Andiamo a risolvere $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.
Notiamo che

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

$n \in \mathbb{N}$ allora $\frac{1}{n} > 0$
$\Longrightarrow \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$

passo ai reciproci $\begin{cases} \frac{1}{n} \to n \\ \varepsilon \to \frac{1}{\varepsilon} \end{cases}$ e si scambia il verso della disequazione

Allora $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \longrightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \longrightarrow \boxed{n > \frac{1}{\varepsilon}}$

(si può passare ai reciproci in una disequazione SOLO se ambo i membri sono POSITIVI)

Quindi, scegliendo n_0 come il primo numero naturale maggiore di $\frac{1}{\varepsilon}$, si ha che $\forall n \geq n_0$ $\frac{1}{n} < \varepsilon$, cioè $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$.

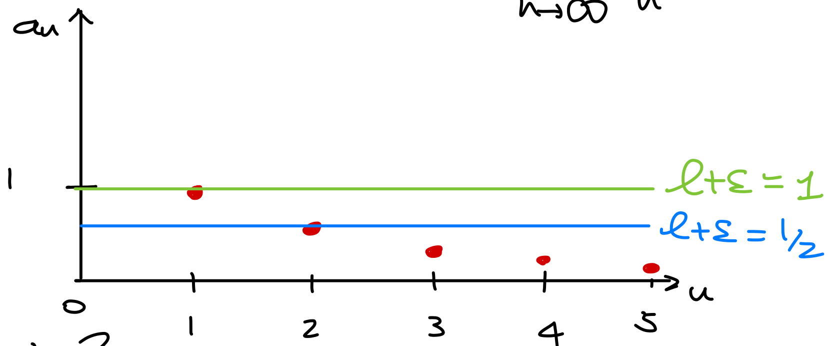
Quindi ho verificato che

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$, cioè che $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Se ad esempio scelgo:

- $\varepsilon = 1$: il più piccolo naturale maggiore di $\frac{1}{\varepsilon} = 1$ è $n_0 = 2$.

È vero che $\forall n \geq 2$ $\frac{1}{n} < \varepsilon = 1$? <u>Sì</u>



- $\varepsilon = \frac{1}{2}$: il più piccolo naturale maggiore di $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ è $n_0 = 3$. Infatti $\forall n \geq 3$ $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}$.

Def: sia $(a_n)_n$ una successione:

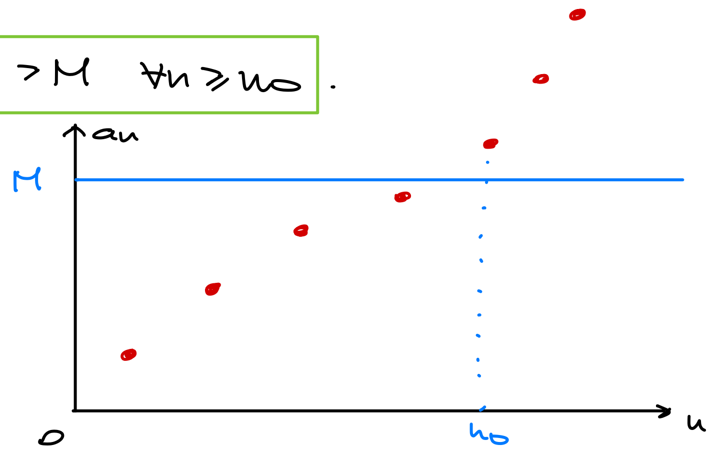
- Diciamo che la successione $(a_n)_n$ diverge a $+\infty$, e si scrive

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty},$$

se $\boxed{\forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n > M \quad \forall n \geq n_0}$.

M = numero arbitrariamente grande

Comunque scelgo $M > 0$, trovo un $n_0 \in \mathbb{N}$ per cui i termini a_n per $n \geq n_0$ si trovano al di sopra di M.

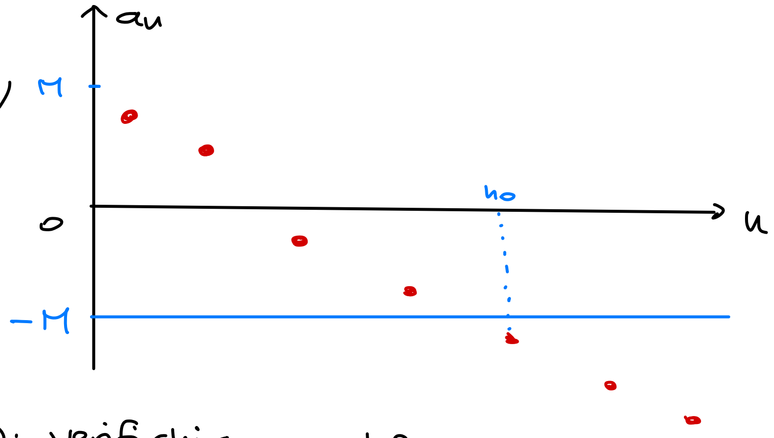


• Diciamo che la successione $(a_n)_n$ diverge a $-\infty$, e si scrive

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty},$$

se $\boxed{\forall M>0 \ \exists n_0\in\mathbb{N} : \ a_n < -M \quad \forall n\geq n_0}$.

Comunque scelgo $M>0$ grande, trovo $n_0\in\mathbb{N}$ per cui i termini a_n per $n\geq n_0$ sono al di sotto di $-M$.



Esempio (verifica di un limite): verifichiamo che

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty.$$

utilizzando la definizione, dobbiamo dimostrare che

$\forall M>0 \ \exists n_0\in\mathbb{N} : \ n^2 > M \quad \forall n\geq n_0.$

Fisso $M>0$ arbitrario e risolvo $n^2>M$.

$$n^2>M \longrightarrow \cancel{n<-\sqrt{M}} \ \vee \ n>\sqrt{M} \longrightarrow \boxed{n>\sqrt{M}}$$

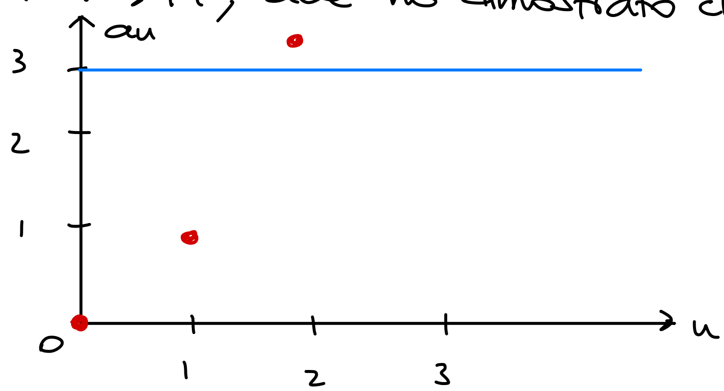
non accettabile perché $n\geq 0$

Scelgo come n_0 il più piccolo numero naturale $>\sqrt{M}$.

In questo modo $\forall n\geq n_0$ risulta $n^2>M$, cioè ho dimostrato che

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty.$$

Ad esempio, se $M=3$ allora n_0 è il piccolo intero maggiore di $\sqrt{3}=1{,}732\ldots$ cioè $n_0=2$. Infatti per $n\geq 2$ $n^2>M=3$



DIVERGENTE = limite infinito

Def: una successione $(a_n)_n$ è irregolare se non è né convergente, né divergente, ovvero se

$$\boxed{\nexists \lim_{n\to\infty} a_n}$$

La successione $a_n = (-1)^n$ è irregolare, perché oscilla indefinitamente tra -1 e 1.

Teorema di unicità del limite: se una successione $(a_n)_n$ ammette limite (finito o infinito), questo è unico.

Limite per eccesso e per difetto

Def: sia $(a_n)_n$ una successione e sia $\ell \in \mathbb{R}$. Si dice che $(a_n)_n$ tende a ℓ per difetto, e si scrive

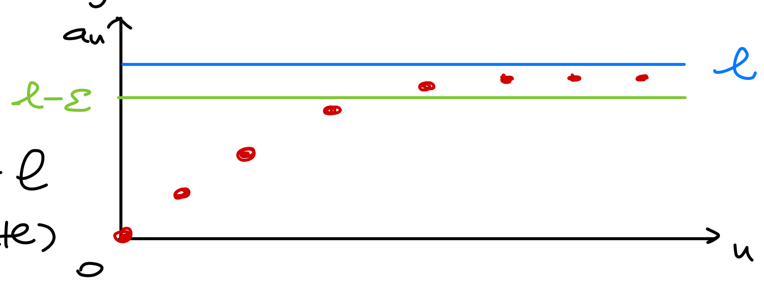
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \ell^-},$$

se $\boxed{\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ -\varepsilon < a_n - \ell < 0 \quad \forall n \geq n_0.}$

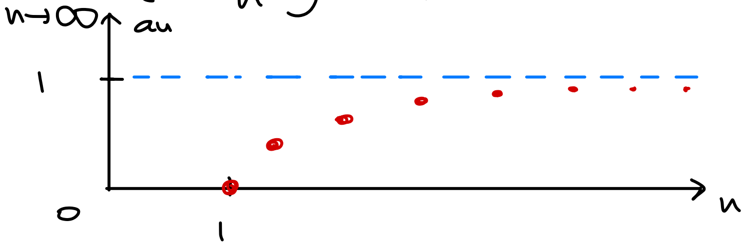
In sostanza, la successione converge a ℓ, ma definitivamente si ha che $a_n < \ell$:

infatti

$-\varepsilon < a_n - \ell < 0 \rightarrow \ell - \varepsilon < a_n < \ell$
(definitivamente)



Esempio: $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1^-$



Def. Sia $(a_n)_n$ una successione e sia $\ell \in \mathbb{R}$. Si dice che $(a_n)_n$ tende a ℓ per eccesso, e si scrive

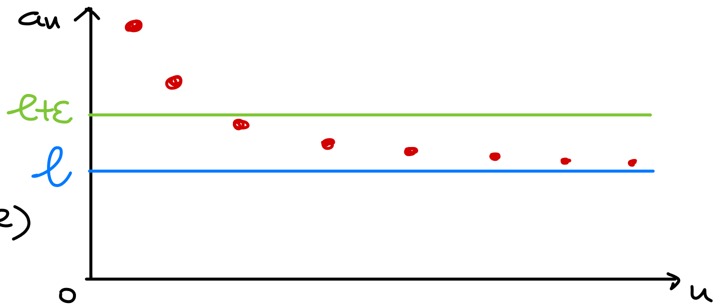
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \ell^+},$$

se $\boxed{\forall \varepsilon>0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ 0 < a_n - \ell < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0}$,

cioè la successione $(a_n)_n$ converge a ℓ ma definitivamente si ha che $a_n > \ell$.

Infatti,

$$0 < a_n - \ell < \varepsilon \ \rightarrow \ \ell < a_n < \ell+\varepsilon$$
(definitivamente)



Esempio: tornando a $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$, per la quale abbiamo detto che $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, si può più precisamente affermare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0^+.$$

LIMITI DI FUNZIONI

Ricordiamo che una funzione reale si denota con

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

dove D è il suo dominio. D'ora in avanti $D = I$ intervallo (intervallo $\rightsquigarrow$ segmento / semiretta), quindi

$$\boxed{f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.}$$

Per introdurre i limiti di funzioni occorre definire un'estensione dei numeri reali comprendente anche $+\infty$ e $-\infty$: tale insieme è $\mathbb{R}$ esteso ed è indicato con

$$\boxed{\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}}$$

si legge "$\mathbb{R}$ esteso" oppure "$\mathbb{R}$ star"

Operazioni su $\mathbb{R}^*$

Dato $a \in \mathbb{R}$ (= non infinito). Definiamo queste operazioni:

- $\pm\infty + a = \pm\infty$,
- $\pm\infty \cdot a = \begin{cases} \pm\infty, & \text{se } a > 0 \\ \mp\infty, & \text{se } a < 0 \end{cases}$

   ← l'infinito conserva il segno: $+\infty \cdot 4 = +\infty$, $-\infty \cdot 3 = -\infty$

   ← l'infinito cambia segno: $+\infty \cdot (-4) = -\infty$, $-\infty \cdot (-3) = +\infty$

- $\pm\infty \cdot 0$ non è definita perché può dare infiniti risultati diversi, cioè si dice che è una FORMA INDETERMINATA.
- $\dfrac{a}{\pm\infty} = 0$ $\quad \left(\dfrac{1}{+\infty} = 0\right)$ vero anche per $a = 0$ cioè $\dfrac{0}{\infty} = 0$.
- $\dfrac{\pm\infty}{a} = \begin{cases} \pm\infty, & a > 0 \\ \mp\infty, & a < 0 \end{cases}$ $\qquad \dfrac{+\infty}{2} = +\infty$, $\dfrac{-\infty}{-3} = +\infty$
- $\dfrac{\pm\infty}{0}$? Vedremo che $\dfrac{\infty}{0} = \infty$, ma per stabilirne il segno servirà un'ulteriore indagine...
- $a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } a > 1 \\ 0, & \text{se } 0 < a < 1 \\ 1, & \text{se } a = 1 \end{cases}$ $\qquad (a > 0)$
- $a^{-\infty} = \begin{cases} 0, & \text{se } a > 1 \\ +\infty, & \text{se } 0 < a < 1 \\ 1, & \text{se } a = 1 \end{cases}$ $\qquad (a > 0)$

- $+\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$
- $+\infty - \infty$ e $-\infty + \infty$ sono FORME INDETERMINATE
- $(+\infty)\cdot(-\infty) = -\infty$, $(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$,
  $(-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$, $(-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$

  gli infiniti seguono la regola dei segni
- $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ è una FORMA INDETERMINATA

x_0 può non appartenere ad A

Def: sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Un punto $x_0 \in \mathbb{R}^*$ è un punto di accumulazione per A se esiste una successione $(a_n)_n$ che soddisfa le seguenti proprietà:

(i) $a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

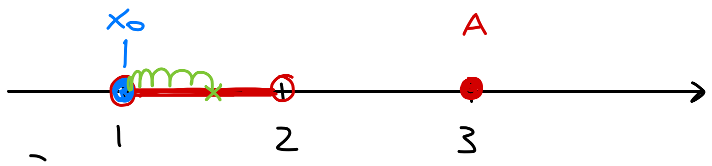
(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$

Si possono riassumere con la scrittura $(a_n)_n \subseteq A \setminus \{x_0\}$

In parole povere, x_0 è un punto di accumulazione per A se posso avvicinarmi arbitrariamente a x_0 tramite solo elementi di A.

Esempi:

- $A = (1,2) \cup \{3\}$.



Prendiamo $x_0 = 1$: questo è un punto di accumulazione per A perché posso raggiungerlo, partendo da A, senza mai uscire dall'insieme. Discorso analogo vale per $x_0 = 2$: anche questo è un punto di accumulazione per A.
Anche tutti gli $x_0 \in (1,2)$ sono punti di accumulazione per A.

Il punto $x_0 = 3$ NON è punto di accumulazione per A, perché per raggiungerlo partendo da un altro punto di A devo per forza uscire dall'insieme.

L'insieme dei punti di accumulazione di A è l'intervallo $[1,2]$.

Per un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ l'insieme dei suoi punti di accumulazione prende il nome di derivato di A e si indica con A'

Nell'esempio precedente

$$A = (1,2) \cup \{3\} \implies A' = [1,2]$$

N.B: $A' \subseteq \mathbb{R}^*$.

- $\boxed{\left.\begin{array}{l} A = (a,b) \\ A = [a,b] \\ A = (a,b] \\ A = [a,b) \end{array}\right\} \implies A' = [a,b].}$

- $\boxed{\left.\begin{array}{l} A = (a,+\infty) \\ A = [a,+\infty) \end{array}\right\} \implies A' = [a,+\infty]}$

- $\boxed{\left.\begin{array}{l} A = (-\infty,a) \\ A = (-\infty,a] \end{array}\right\} \implies A' = [-\infty,a]}$

gli infiniti sono punti di accumulazione per le semirette

- $A = \mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$: nessun numero naturale può essere punto di accumulazione per $\mathbb{N}$.

$$A' = \{+\infty\}$$

ILIMITI SI FANNO SOLO NEI PUNTI DI ACCUMULAZIONE

Definiamo i limiti di funzioni: (ricordare che I è un intervallo!)

Def: sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e siano $x_0, \ell \in \mathbb{R}^*$ con $x_0 \in I'$.

Si dice che

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$$

se $\boxed{\forall (a_n)_n \subseteq I \setminus \{x_0\} : \lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \text{ risulta } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell.}$

Se $\ell = 0$ si dice che f è un infinitesimo per $x \to x_0$.
Se $\ell = \pm\infty$ si dice che f è un infinito per $x \to x_0$.

Anche per le funzioni vale il seguente:

Teorema di unicità del limite:
Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$, allora il limite ℓ è unico.

Esempio (verifica di un limite): verifichiamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Anzitutto $\ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, quindi $I = (0, +\infty) \Rightarrow I' = [0, +\infty]$.
$\Rightarrow \boxed{x_0 = +\infty}$, $\boxed{\ell = +\infty}$.

Usando la definizione data, il limite si traduce in

$\forall (a_n)_n \subset (0, +\infty) : \lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$ risulta $\lim_{n \to \infty} \ln(a_n) = +\infty$.

Per verificare questa affermazione devo verificare il limite di successione

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} \ln(a_n) = +\infty.}$$

Fisso $(a_n)_n \subset (0, +\infty)$ tale che $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$. Verifico il limite blu: devo dimostrare che

$$\forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ln(a_n) > M \quad \forall n \geq n_0.$$

Fissiamo $M > 0$ e risolviamo $\ln(a_n) > M$.

$$\ln(a_n) > M \longrightarrow \underbrace{e^{\ln(a_n)}}_{= a_n} > e^M \longrightarrow a_n > e^M = \tilde{M} > 0.$$

$e^{\ln(x)} = x$ per $x > 0$

Quindi $\lim_{n \to \infty} \ln(a_n) = +\infty$ se $\forall \tilde{M} > 0$ $a_n > \tilde{M}$ definitivamente.
Ma questo è vero perché $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$.
Ricapitolando: $\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \ln(a_n) = +\infty$
e ho dimostrato che $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$. $\square$

Def: sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in \mathbb{R}^*$ e $l \in \mathbb{R}$, con $x_0 \in I'$.

- Diciamo che **f tende a l per difetto**, e si scrive

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l^-}$$

se $\boxed{\forall (a_n)_n \subseteq I \setminus \{x_0\} : \lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \text{ risulta } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = l^-.}$

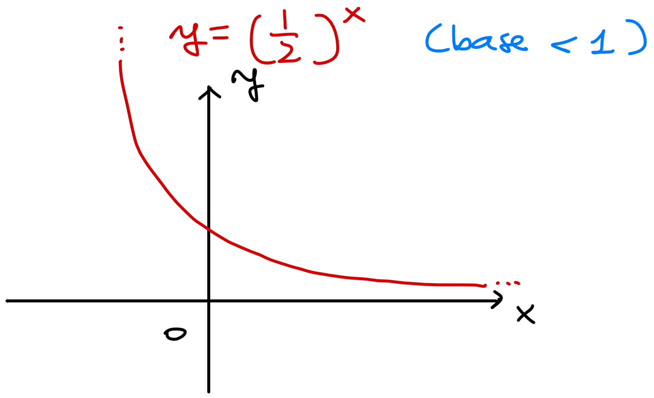
- Diciamo che **f tende a l per eccesso**, e si scrive

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l^+}$$

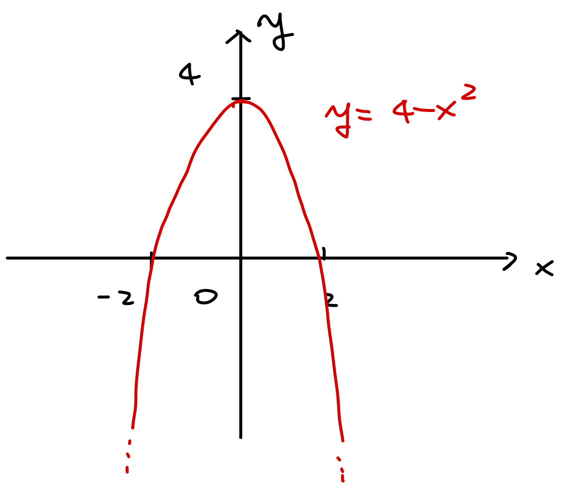
se $\boxed{\forall (a_n)_n \subseteq I \setminus \{x_0\} : \lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \text{ risulta } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = l^+.}$

Esempi:

- $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0^+$



- $\lim_{x \to 0} (4 - x^2) = 4^-$



Per le funzioni si può dare un'altra definizione che non ha un analogo per le successioni:

Def: sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}^*$, con $x_0 \in I'$.

- Diciamo che il limite destro di f per $x \to x_0$ è ℓ, e si scrive

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell},$$

se $\boxed{\forall (a_n)_n \subseteq I \setminus \{x_0\} : \lim_{n\to\infty} a_n = x_0^+ \text{ risulta } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell.}$

- Diciamo che il limite sinistro di f per $x \to x_0$ è ℓ, e si scrive

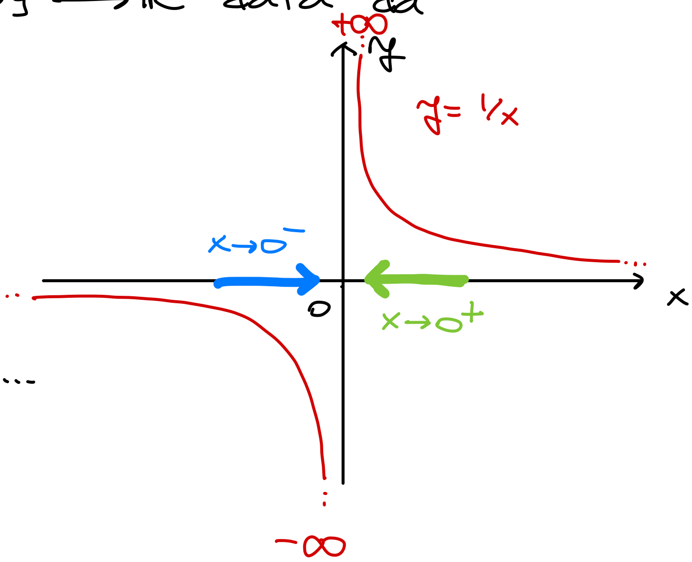
$$\boxed{\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell},$$

se $\boxed{\forall (a_n)_n \subseteq I \setminus \{x_0\} : \lim_{n\to\infty} a_n = x_0^- \text{ risulta } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell.}$

Esempio:

Consideriamo la funzione $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$



Fare il limite per $x \to 0^+$ significa avvicinarsi a $x_0 = 0$ da numeri positivi:

$1,\ 0.8,\ 0.3,\ 0.02,\ 0.001, \dots$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

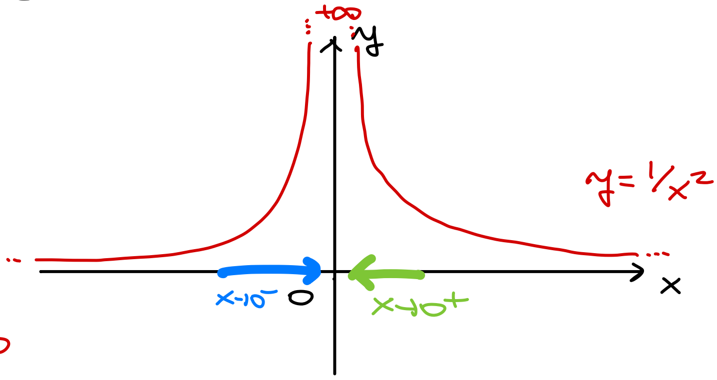
$$\frac{1}{0^+} = +\infty$$

Fare il limite per $x \to 0^-$ significa avvicinarsi a $x_0 = 0$ da numeri negativi: $-1,\ -0.8,\ -0.3,\ -0.02,\ -0.001, \dots$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Invece, se consideriamo $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$



si ha che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^+)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

0^+ numero positivo piccolissimo

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(0^-)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

0^- numero negativo piccolissimo (ad esempio $-0{,}001$)

$(0^-)^2 = 0^+$

Teorema

Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e siano $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}^*$ con $x_0 \in I'$.
Allora

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell.$$

In pratica, il limite esiste se e soltanto se limite destro e limite sinistro sono uguali!

Nell'esempio precedente:

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \neq \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \Rightarrow \boxed{\nexists \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}}$

- $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty}$

FUNZIONI CONTINUE

Def: sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$. Si dice che f è continua in x_0 se
$$\boxed{\forall (a_n)_n \subseteq I : \lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \text{ risulta } \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0).}$$

Rispetto alla definizione di limite ci sono alcune differenze:

- $x_0 \in I$ anziché $x_0 \in I'$,
- a_n può essere uguale a x_0,
- $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$ anziché a ℓ.

Riassumendo, una funzione è continua se permette al limite di entrare e uscire dal suo argomento.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0 \implies f(\underbrace{\lim_{n\to\infty} a_n}_{x_0}) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0).$$

Come capire se una funzione è continua in x_0?

Teorema:
Se $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, allora

$$\boxed{f \text{ è continua in } x_0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

Def: una funzione $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua se è continua in x_0 $\forall x_0 \in I$.

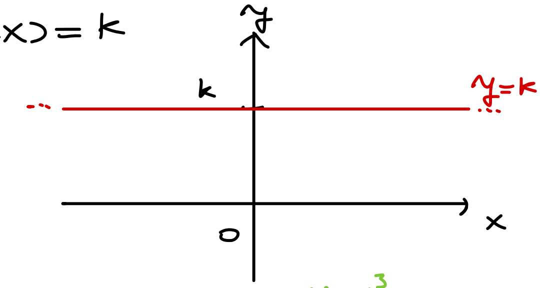
Una funzione continua si riconosce dal grafico perché posso disegnarla senza mai staccare la penna dal foglio.

Funzioni elementari: continuità e limiti

Le funzioni elementari sono tutte continue nel loro dominio!

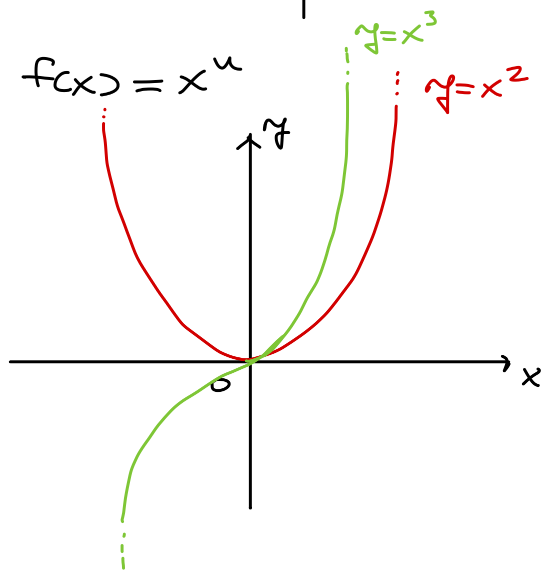
1) FUNZIONE COSTANTE $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = k$

$\longrightarrow$ CONTINUA in $\mathbb{R}$ + $\lim_{x \to x_0} k = k \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^*$



2) FUNZIONE POTENZA: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$

$\longrightarrow$ CONTINUA in $\mathbb{R}$



Per $x_0 \in \mathbb{R}$, essendo f continua

$$\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n .$$

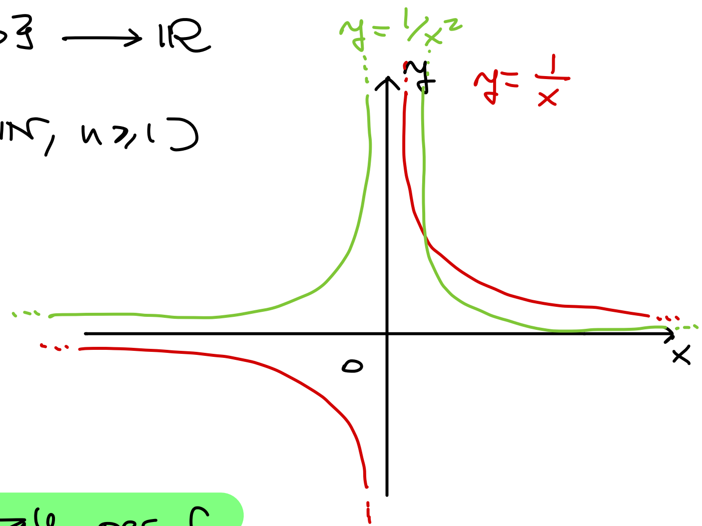
Per $x_0 = \pm\infty$, invece,

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = (+\infty)^n = +\infty \quad \forall n$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = (-\infty)^n = \begin{cases} +\infty, & n \text{ pari} \\ -\infty, & n \text{ dispari} \end{cases}$$

3) FUNZIONE RAZIONALE $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x^n} \qquad (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$$



$\longrightarrow$ CONTINUA in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Si ha che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\pm\infty} = 0.$$

Si dice che $y = 0$ asintoto orizzontale per f.

Def: se $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $\ell \in \mathbb{R}$, si dice che f ha un asintoto orizzontale per $x \to \pm\infty$ in $y = \ell$ se

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell . \qquad (\ell \in \mathbb{R} \; !!)$$

Cosa succede alla funzione $f(x) = \frac{1}{x^n}$ nei pressi di $x_0 = 0$?

Per capirlo si calcola

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } n \text{ pari} \\ \nexists, & \text{se } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Infatti

- se n pari $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$
- se n dispari $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$.

In ogni caso, $x = 0$ è un asintoto verticale per f.

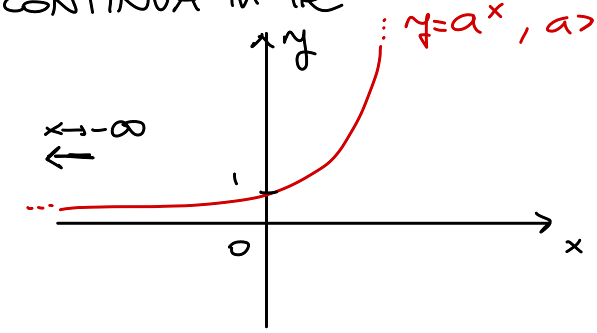
Def: Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Si dice che f ha un asintoto verticale in $x = x_0$ se

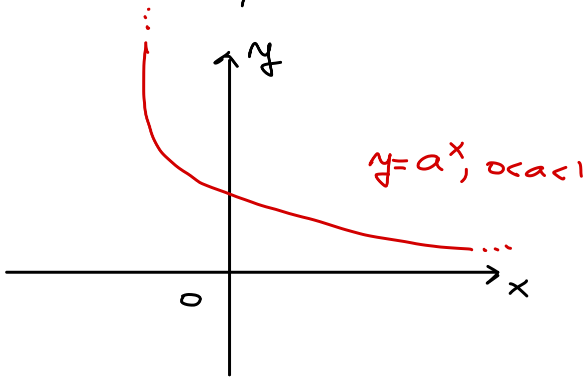
$$\boxed{\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty.}$$

$x \to x_0^\pm$ significa $x \to x_0^+$ e\o $x \to x_0^-$

4) FUNZIONE ESPONENZIALE $f(x) = a^x$ con $a > 0$, $a \neq 1$

$\longrightarrow$ CONTINUA in $\mathbb{R}$





$a > 1$

- $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

$0 < a < 1$

- $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$
- $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

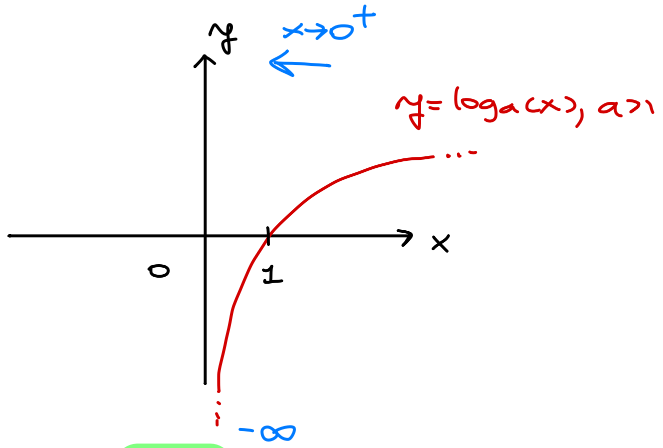
$y = 0$ asintoto orizzontale

5) FUNZIONE LOGARITMO

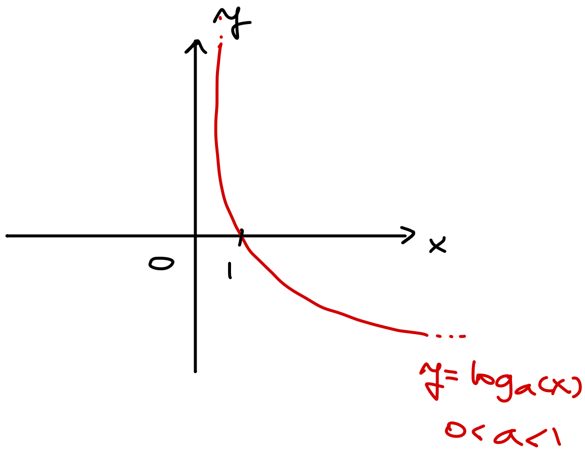
$f(x) = \log_a(x)$ con $a > 0$, $a \neq 1$

$f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\longrightarrow$ CONTINUA in $(0, +\infty)$



a > 1



0 < a < 1

a > 1	0 < a < 1
$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} \log_a(x) = -\infty$
$\lim_{x \to 0} \log_a(x) \nexists$, perché $\nexists \lim_{x \to 0^-}$	//
$\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = -\infty$	$\lim_{x \to 0^+} \log_a(x) = +\infty$

$x = 0$ asintoto verticale

6) FUNZIONI SENO, COSENO, ARCOSENO, ARCOCOSENO

$\left.\begin{array}{l} f(x) = \sin(x) \\ f(x) = \cos(x) \end{array}\right\}$ continue in $\mathbb{R}$

$\left.\begin{array}{l} f(x) = \arcsin(x) \\ f(x) = \arccos(x) \end{array}\right\}$ continue in $[-1, 1]$

N.B: $\nexists \lim_{x \to \pm\infty} \sin(x)$, $\nexists \lim_{x \to \pm\infty} \cos(x)$

perché sono funzioni periodiche che oscillano indefinitamente tra -1 e 1.

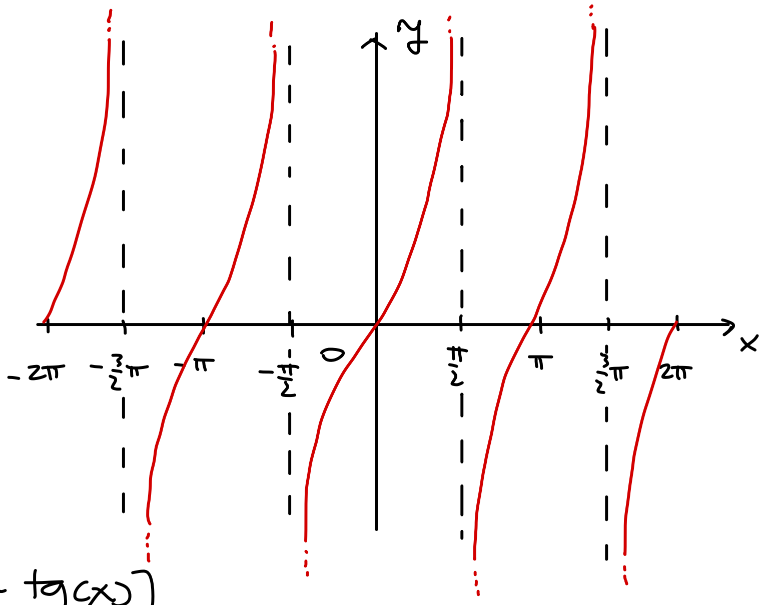
7) FUNZIONE TANGENTE

$$f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

CONTINUA IN D

Inoltre, essendo periodica,

$$\nexists \lim_{x \to \pm\infty} tg(x)$$



Cosa avviene nei punti $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$?

- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} tg(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} tg(x) = -\infty$

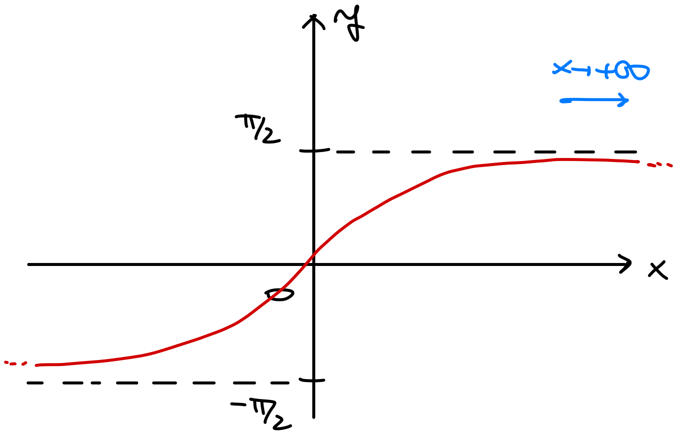
$\left(\nexists \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} tg(x) \right)$

Ognuna delle rette $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ è un asintoto verticale per f.

8) FUNZIONE ARCOTANGENTE

$f(x) = arctg(x)$

CONTINUA in $\mathbb{R}$



Inoltre,

$$\lim_{x \to +\infty} arctg(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to -\infty} arctg(x) = -\frac{\pi}{2}$$

cioè $y = \frac{\pi}{2}$ e $y = -\frac{\pi}{2}$ sono asintoti orizzontali per f.

Discontinuità

Se f non è continua in x_0 si dice che x_0 è un punto di discontinuità per f. In questo caso

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$

L'unico tipo di discontinuità che tratteremo è la discontinuità con salto: si dice che $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ha un salto in $x_0 \in I'$ se limite destro e limite sinistro per $x \to x_0$ di f esistono finiti ma diversi.

Esempio: consideriamo $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\boxed{f(x) = \frac{x}{|x|}.}$$ FUNZIONE SEGNO DI X

Ricordiamo che

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

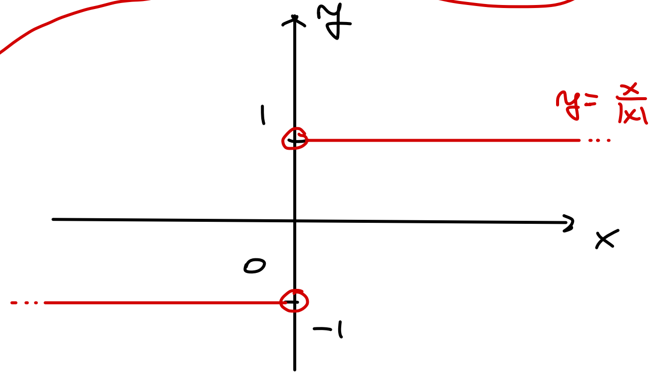
e quindi

$$\frac{x}{|x|} = \begin{cases} \cancel{\frac{x}{x}}\ 1, & \text{se } x > 0 \\ \cancel{\frac{x}{-x}}\ 1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

($x \neq 0$ perché sta a denominatore)

$$\longrightarrow \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}}$$

La funzione segno presenta un SALTO in $x = 0$. Infatti,



- $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \to 0} 1 = 1$

$f(x) = 1$ se $x > 0$

$f(x) = -1$ se $x < 0$

- $\displaystyle \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \to 0} (-1) = -1$

Allora il limite destro di f per $x \to 0$ è DIVERSO dal limite sinistro e sono entrambi FINITI: quindi $f(x) = \frac{x}{|x|}$ presenta una discontinuità di tipo salto in $x_0 = 0$.

Regole del calcolo dei limiti

Consideriamo due funzioni $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in I'$.
se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \quad , \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$$

allora:

(1) $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \ell_1 \pm \ell_2$ (purché $\ell_1 \pm \ell_2$ non sia $+\infty - \infty$)

Il limite della somma/differenza è la somma/differenza dei limiti.

(2) $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell_1 \cdot \ell_2$ (purché $\ell_1 \cdot \ell_2$ non sia $0 \cdot \infty$)

(3) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$ (purché $\frac{\ell_1}{\ell_2} \neq \frac{0}{0}$ e $\frac{\ell_1}{\ell_2} \neq \frac{\infty}{\infty}$)

(4) $\lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \ell_1^{\ell_2}$ se $\ell_1 > 0$ con $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$

(5) $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\ell_1|$.

Da queste discendono proprietà per le funzioni continue:
se $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue,

(I) $f \pm g$ continua: quindi ad esempio ogni polinomio è continuo in $\mathbb{R}$ perché somma o differenza di potenze e costanti.

(II) $f \cdot g$ continua

(III) $\frac{f}{g}$ è continua in tutti i punti x_0 per cui $g(x_0) \neq 0$.

Ad esempio: $y = \frac{x^2+x-3}{x}$) f polinomio = continua in $\mathbb{R}$

) g potenza (esponente 1) = continua in $\mathbb{R}$

è continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ perché il denominatore è nullo solo per $x=0$.

Ogni funzione razionale fratta è continua nel suo dominio.

(IV) f^g è continua in tutti i punti x_0 in cui $f(x_0) > 0$

(V) $|f|$ è continua

Si ha inoltre che, se esistono,

$f \circ g$ e $g \circ f$ continue,

cioè la composizione di funzioni continue è continua.

Quest'ultima proprietà garantisce che vale il seguente:

Teorema

Siano $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $f \circ g$ esiste.

Dato $x_0 \in J'$ si ha che

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} (f \circ g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\ell).$$

Esempio: calcoliamo $\lim_{x \to -\infty} \sin(e^x)$.

Noi sappiamo che $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$. Inoltre la funzione seno è continua in $\mathbb{R}$.

Dal precedente teorema, allora

$$\lim_{x \to -\infty} \sin(e^x) = \sin\Big(\underbrace{\lim_{x \to -\infty} e^x}_{=0}\Big) = \sin(0) = \boxed{0}.$$

ESERCIZI: LIMITI PER SOSTITUZIONE

Esercizio 1 Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3+x^2+4x-7)$$

Risolviamo il limite per sostituzione: poiché il limite della somma è la somma dei limiti, calcolo il limite di ogni singolo addendo e poi sommo i risultati:

- $\lim_{x\to+\infty} x^3 = (+\infty)^3 = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} x^2 = (+\infty)^2 = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} 4x = 4\cdot(+\infty) = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} (-7) = -7.$

$$a\cdot(+\infty) = \begin{cases} +\infty, & a>0 \\ -\infty, & a<0 \end{cases}$$

In conclusione

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3+x^2+4x-7) = +\infty+\infty+\infty-7 = +\infty-7 = \boxed{+\infty}.$$

$+\infty-a=+\infty$

$+\infty+\infty=+\infty$

Esercizio 2: Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x}+\sin(x)\right)$$

Anche questo lo risolvo per sostituzione: calcolo il limite dei singoli addendi

- $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$
- $\lim_{x\to0^+} \sin(x) = \sin(0) = 0$ perché il seno è continuo.

Quindi

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{1}{x}+\sin(x)\right) = +\infty+0 = \boxed{+\infty.}$$

Esercizio 3 Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

Ancora per sostituzione: ricordiamo che l'arcotangente è continua, quindi

$$\lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right) = \operatorname{arctg}\left(\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}\right)$$

Calcoliamo

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{1^+-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

Immaginatevi 1^+ come qualcosa di simile a $1{,}01$ per esempio.

$1{,}01 - 1 = 0{,}01$

$\to \quad 1^+ - 1 = 0^+$

da cui segue che

$$\lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-1}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{0^+}\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}(+\infty) = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$

Esercizio 4 Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to +\infty} \ln\left(\frac{1}{e^{x^2+1}}\right)$$

Essendo il logaritmo una funzione continua,

$$= \ln\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x^2+1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{(+\infty)^2+1}}\right) \underset{(+\infty)^2 = +\infty}{=} \ln\left(\frac{1}{e^{+\infty+1}}\right)$$

$$\underset{+\infty+1=+\infty}{=} \ln\left(\frac{1}{e^{+\infty}}\right) \underset{e^{+\infty} = +\infty}{=} \ln\left(\frac{1}{+\infty}\right) = \ln(0^+) \underset{\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty}{=} \boxed{-\infty}$$

$$\frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$$\frac{1}{-\infty} = 0^-$$

Esercizio 5 Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to 0^+} e^{1/x}$$

Essendo l'esponenziale continua,

$$= e^{\lim_{x\to 0^+} 1/x} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = \boxed{+\infty}$$

Notate invece che

$$\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = \boxed{0}$$

Poiché $\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = +\infty \neq \lim_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$, concludiamo che

$$\nexists \lim_{x \to 0} e^{1/x}.$$

Tuttavia questo <u>non</u> è un caso di discontinuità di tipo salto, perché uno dei due limiti è INFINITO.

Esercizio 6 Data la funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right), & \text{se } x \geq 0 \quad \leftarrow 1^\circ \text{ TRATTO} \\ x^2 + 3x + 2, & \text{se } x < 0, \quad \leftarrow 2^\circ \text{ TRATTO} \end{cases}$$

studiarne la continuità.

Questa funzione è una funzione definita a tratti: nei singoli tratti la continuità è la stessa della legge di definizione assegnata, ma bisogna sempre indagare sulla continuità nel punto di stacco, in questo caso $x=0$.

1° TRATTO: per $x>0$ $f(x) = \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{2}\right)$, che è composizione di un seno (continuo in $\mathbb{R}$) e di $x^2 + \frac{\pi}{2}$ (continuo in $\mathbb{R}$).
Composizioni di funzioni continue = continua
$\Rightarrow f$ è continua in $(0, +\infty)$, cioè per $x>0$.

2° TRATTO: per $x<0$ $f(x) = x^2 + 3x + 2$, che è un polinomio (continuo in $\mathbb{R}$) $\Rightarrow f$ è continua in $(-\infty, 0)$, cioè per $x<0$.

Ne consegue che f è continua in $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
Studiamo ora la continuità in $x_0=0$, che è il punto di stacco tra le due leggi di definizione. Qui è necessario usare che

$$f \text{ continua in } x_0=0 \iff \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0).$$

Innanzitutto,

$$f(0)=\sin\left(0^2+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

c'è =

$$f(x)=\begin{cases} \sin\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right), & \text{se } x\geq 0 \\ x^2+3x+2, & \text{se } x<0, \end{cases}$$

Notiamo anche che

sin continuo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{x\to 0} \sin\left(x^2+\frac{\pi}{2}\right) \overset{\downarrow}{=} \sin\left(0+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

Rimane da calcolare il limite sinistro:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{x\to 0}(x^2+3x+2) = 0^2+3\cdot 0+2=2.$$

Allora

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 2 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 = f(0),$$

cioè f non è continua in $x_0=0$. Oltretutto, limite destro e limite sinistro sono finiti ma diversi, cioè $x_0=0$ è un punto di discontinuità di tipo salto per f.

Esercizio 7 Data la funzione $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - x + 1, & \text{se } x \leq 1 \\ 3^{x+1} - a, & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

determinare il valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ per cui f risulta continua in $\mathbb{R}$.

Nel primo tratto f è un polinomio, quindi continua per $x < 1$. Nel secondo tratto f è differenza di un'esponenziale (continua) e di una costante (continua), quindi è continua per $x > 1$. Quindi f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ qualunque sia il valore di $a \in \mathbb{R}$.

Studiamo la continuità in $x_0 = 1$: essendo punto di stacco

$$f \text{ continua in } x_0 = 1 \iff \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1).$$

Si ha che $f(1) = -(1)^2 - 1 + 1 = -1 - 1 + 1 = -1$.

Poi

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \to 1} (-x^2 - x + 1) = -1.$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \to 1} (3^{x+1} - a) = 3^{1+1} - a = 3^2 - a$$
$$= 9 - a.$$

Ho ottenuto che

$$f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 9 - a.$$

Perciò f è continua in $x_0 = 1 \iff 9 - a = -1$

$$\iff -a = -9 - 1 \iff -a = -10 \iff \boxed{a = 10}$$

Per $a = 10$, f è anche continua in $x_0 = 1$, quindi continua in tutto $\mathbb{R}$.

FORME INDETERMINATE

Tra le operazioni su $\mathbb{R}^*$ alcune non sono ben definite, perché restituiscono delle forme indeterminate:

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad +\infty-\infty, \quad 0\cdot\infty, \quad 1^{\infty}, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Ad esempio, $\frac{0}{0}$ è una forma indeterminata perché può restituire qualsiasi risultato. Infatti, affermare che $\frac{0}{0}=k$ vuol dire che k è quel numero che moltiplicato per 0 fa 0, ma tutti i numeri moltiplicati per 0 fanno 0 !!

Quindi se risolvendo per sostituzione un limite arrivo a una di queste forme, serve un'altra strategia!

Forma indeterminata $\frac{0}{0}$

Esercizio 1 Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

Per sostituzione si ottiene che

$$= \frac{(1)^2-1}{1-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \qquad F.I.$$

In questo caso utilizziamo il prodotto notevole:

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$$

$$\rightarrow \underbrace{x}_{A=x}{}^2-\underbrace{1}_{B=1} = (x+1)(x-1)$$

Quindi,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = \boxed{2}.$$

Esercizio 2 Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2}$$

Per sostituzione si ha che

$$= \frac{(2)^2-5\cdot 2+6}{2-2} = \frac{4-10+6}{2-2} = \frac{0}{0} \quad F.I.$$

Anche qui devo scomporre il numeratore di modo da esplicitare il termine $(x-2)$: calcoliamo il Δ del numeratore

$$\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 6 = 25-24 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{5\pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

In generale un polinomio di 2° grado con $\Delta \geq 0$ ha due radici reali x_1 e x_2 (se $\Delta = 0$ allora $x_1 = x_2$).
Vale sempre la scomposizione

$$\boxed{ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)}.$$

Nel nostro esercizio, $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ e $a = 1$. Quindi

$$x^2-5x+6 = (x-3)(x-2)$$

e perciò

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2}(x-3) = 2-3 = \boxed{-1}.$$