Forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ e $+\infty-\infty$

Esercizio 1 Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3x+4}{x-3}.$$

Per sostituzione:

$$= \frac{(+\infty)^2+3\cdot(+\infty)+4}{+\infty-3} = \frac{+\infty+\infty+4}{+\infty-3} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad F.I.$$

Quando ho un rapporto di polinomi che danno una F.I. $\frac{\infty}{\infty}$ si utilizza il metodo del raccoglimento forzato:

1) si individuano a numeratore e denominatore i rispettivi termini di grado massimo

N: x^2+3x+4 — grado 2

D: $x-3$ — grado 1

2) si raccoglie a numeratore e a denominatore il rispettivo termine di grado massimo:

$x^2 = x\cdot x$

$$N:\; x^2+3x+4 = x^2\left(\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}^{\,1} + \frac{3\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} + \frac{4}{x^2}\right)$$

$$= \boxed{x^2\left(1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}$$

$$D:\; x-3 = x\left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} - \frac{3}{x}\right) = \boxed{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}$$

3) Si riscrive il limite con numeratore e denominatore nelle forme ottenute e semplifico i termini raccolti.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3x+4}{x-3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\cancel{2}}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{3}{x}\right)}$$

$$\frac{x^2}{x} = \frac{\cancel{x}\cdot x}{\cancel{x}} = x$$

Adesso posso risolvere il limite per sostituzione:

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\overset{+\infty}{x}\left(1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{1-\frac{3}{x}} = \frac{+\infty\left(1+\frac{3}{+\infty}+\frac{4}{+\infty}\right)}{1-\frac{3}{+\infty}}$$

$3/{+\infty}$ $\to 0$

$$= \frac{+\infty\,(1+0+0)}{1-0} = \frac{+\infty \cdot 1}{1} = \boxed{+\infty}$$

Esercizio 2 Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2-4}{2x^2-x+3}$$

Per sostituzione:

$$= \frac{3(+\infty)^2-4}{2(+\infty)^2-(+\infty)+3} = \frac{3(+\infty)-4}{2(+\infty)-\infty+3} = \frac{+\infty}{+\infty-\infty}$$

F.I.: $\frac{\infty}{\infty}$ e $+\infty-\infty$

La tecnica del raccoglimento forzato non solo scioglie la F.I. $\frac{\infty}{\infty}$ ma anche quella $+\infty-\infty$.

Usiamo il raccoglimento forzato:

N: $3x^2-4 = x^2\left(\frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}-\frac{4}{x^2}\right) = \boxed{x^2\left(3-\frac{4}{x^2}\right)}$

D: $2x^2-x+3 = x^2\left(\frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}-\frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}+\frac{3}{x^2}\right) = \boxed{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}$

Riscrivo il limite:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2-4}{2x^2-x+3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(3-\frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3-\frac{4}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} = \frac{3-\frac{4}{+\infty}}{2-\frac{1}{+\infty}+\frac{3}{+\infty}} = \frac{3-0}{2-0+0} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

Esercizio 3 Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{x^2+3x}$$

Per sostituzione:

$$= \frac{-\infty - 1}{(-\infty)^2 + 3(-\infty)} = \frac{-\infty}{+\infty - \infty} \qquad \text{F.I.: } \frac{\infty}{\infty} \text{ e } +\infty-\infty$$

Usiamo il raccoglimento forzato:

$$N: \quad x-1 = x\left(\cancel{\frac{x}{x}} - \frac{1}{x}\right) = \boxed{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$D: \quad x^2+3x = x^2\left(\cancel{\frac{x^2}{x^2}} + \frac{3\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}\right) = \boxed{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}$$

Riscriviamo il limite:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-1}{x^2+3x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^{\cancel{2}}\left(1+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}$$

$$= \frac{1-\frac{1}{-\infty}}{(-\infty)\left(1+\frac{3}{-\infty}\right)} = \frac{1-0}{(-\infty)\cdot(1+0)} = \frac{1}{-\infty} = \boxed{0}$$

Trucco: in generale se p e q sono due polinomi e ho il limite

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)}$$

si ha sempre che:

- se il grado di p è maggiore del grado di q, il limite fa ∞. Il segno dell'∞ dipende dai termini di grado massimo di p e q:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-1}{-4x+3} = -\infty \quad \text{perché } \frac{3}{-4} < 0$$

- se il grado di p è minore del grado di q, il limite fa 0.

- se p e q hanno stesso grado, il limite è il rapporto dei coefficienti di grado massimo di p e q:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^3-1 \;\;)\, p \text{ ha grado } 3}{5x^3+x \;\;)\, q \text{ ha grado } 3} = \frac{3}{5}.$$

Esercizio 4 Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2-x)$$

Per sostituzione,

$$= (+\infty)^2 - (+\infty) = +\infty - \infty \quad \text{F.I.}$$

Anche la F.I. $+\infty - \infty$ si scioglie con la tecnica del raccoglimento forzato: il termine di grado massimo è x^2 e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2-x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} - \frac{\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)$$

$$= (+\infty)^2 \cdot \left(1-\frac{1}{+\infty}\right) = +\infty \cdot (1-0) = +\infty \cdot 1 = \boxed{+\infty}$$

Esercizio 5 Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to-\infty}(2x^3+3x^2-4)$$

Per sostituzione:

$$=2(-\infty)^3+3(-\infty)^2-4=2\cdot(-\infty)+3(+\infty)-4$$

$$=-\infty+\infty-4=-\infty+\infty=+\infty-\infty \quad F.I.$$

Usando il raccoglimento forzato, dove il termine di grado massimo è x^3, si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty}(2x^3+3x^2-4)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(\frac{2\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}}+\frac{3\cancel{x^2}}{x^{\cancel{3}}}-\frac{4}{x^3}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3}\right)=(-\infty)^3\cdot\left(2+\frac{3}{-\infty}-\frac{4}{-\infty}\right)$$

$$=-\infty\cdot(2+0-0)=-\infty\cdot2=\boxed{-\infty}$$

Gerarchia degli infiniti

La tecnica del raccoglimento forzato, che funziona molto bene con i polinomi, non è sufficiente a risolvere limiti del tipo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+1}{x^2} = \frac{e^{+\infty}+1}{(+\infty)^2} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad F.I.$$

Ricordiamo che se per $x_0 \in \mathbb{R}^*$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty,$$

si dice che f è un infinito per $x \to x_0$.

Se $x_0 = +\infty$, sono degli infiniti i seguenti:

$$\log_a(x) \quad , \quad x^\alpha \quad (\alpha>0) \quad , \quad b^x \quad (b>1)$$

logaritmo — potenza — esponenziale con base > 1

Def: siano $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ due infiniti per $x \to x_0$, $x_0 \in I'$, cioè tali che

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \quad , \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty .$$

Diciamo che:

- f è un infinito di ordine MAGGIORE a g, e si scrive

$$\boxed{f \gg g \quad \text{per } x\to x_0} ,$$

$\gg$ "molto maggiore"

se

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty .}$$

- f è un infinito di ordine MINORE a g, e si scrive

$$\boxed{f \ll g \quad \text{per } x\to x_0}$$

$\ll$ "molto minore"

se

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0} .$$

• **f e g sono infiniti dello STESSO ordine** se

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

Esempi: consideriamo due polinomi $p(x)$ e $q(x)$.
In base a quanto abbiamo visto: per $x \to \pm\infty$

- $p >> q$ se il grado di p è maggiore del grado di q,
- $p << q$ se il grado di p è minore del grado di q,
- p e q hanno stesso ordine se hanno lo stesso grado.

Teorema (GERARCHIA DEGLI INFINITI)
Se $a > 0, a \neq 1$, $\alpha > 0$, $b > 1$ si ha che

$$\boxed{\log_a(x) << x^\alpha << b^x \quad \text{per } x \to +\infty}$$

In base alla definizione di ordine di infinito, ne consegue che:

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a(x)}{x^\alpha} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{\log_a(x)} = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{b^x} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{b^x}{x^\alpha} = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a(x)}{b^x} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{b^x}{\log_a(x)} = +\infty$.

Per le potenze, se il grado aumenta, aumenta anche l'ordine di infinito, cioè $x^2 << x^3$ per $x \to +\infty$.
Anche per l'esponenziale vale una cosa simile:
se $b, c > 1$ con $b < c \Rightarrow b^x << c^x$ per $x \to +\infty$.
Ad esempio, $2^x << 3^x$ per $x \to +\infty$ e quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{3^x} = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{3^x}{2^x} = +\infty.$$

Invece, i logaritmi hanno tutti lo stesso ordine di infinito, in virtù della formula di cambiamento di base: siano $a, b > 0$ e $a, b \neq 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a(x)}{\log_b(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{\log_b(x)}}{\log_b(a)} \cdot \frac{1}{\cancel{\log_b(x)}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\log_b(a)}$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

$$= \frac{1}{\log_b(a)} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Esercizio 1 Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+x+1}$$

Per sostituzione,

$$= \frac{\ln(+\infty)}{(+\infty)^2+\infty+1} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

utilizziamo la gerarchia degli infiniti:

$$\underbrace{\ln(x)}_{\text{logaritmo}} \ll \underbrace{x^2+x+1}_{\text{polinomio} \to \text{potenza}} \quad \text{per } x \to +\infty$$

quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+x+1} = \boxed{0}.$$

Esercizio 2 Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x+1}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

Dalla gerarchia degli infiniti:

$$\underbrace{e^x+1}_{\text{esponenziale}} \gg \underbrace{x^2}_{\text{potenza}} \quad \text{per } x \to +\infty \qquad (e > 1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x+1}{x^2} = \boxed{+\infty}.$$

La gerarchia degli infiniti permette di sciogliere anche la F.I. $+\infty-\infty$.

Esercizio 3 Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x - x^3)$$

Per sostituzione

$$= e^{+\infty} - (+\infty)^3 = +\infty - \infty \quad \text{F.I.}$$

Questo limite si risolve così:

RACCOGLIMENTO FORZATO + GERARCHIA DEGLI INFINITI

1) Raccogliamo l'infinito di ordine massimo:

$$e^x >> x^3 \quad \text{per } x\to+\infty$$

$\Rightarrow$ l'infinito di grado massimo è e^x.

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x - x^3) = \lim_{x\to+\infty} e^x\left(\cancel{\frac{e^x}{e^x}} - \frac{x^3}{e^x}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^x}_{+\infty}\left(1 - \underbrace{\frac{x^3}{e^x}}_{?}\right)$$

2) Uso la gerarchia degli infiniti per risolvere

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x} = 0 \quad \text{perché } x^3 << e^x \quad \text{per } x\to+\infty$$

Quindi

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{e^x}_{+\infty}\left(1 - \underbrace{\frac{x^3}{e^x}}_{0}\right) = +\infty(1-0) = \boxed{+\infty}.$$

Esercizio 4 Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-2x^2+\ln^3(x)-4\right)$$

Per sostituzione,

$$= -2\cdot(+\infty)^2+(\ln(+\infty))^3-4 = -\infty+\infty-4 = +\infty-\infty \quad F.I.$$

Gli infiniti che compaiono sono x^2 e $\ln^3(x)$, dove

$$\ln^3(x) << x^2 \quad \text{per } x\to+\infty.$$

Allora uso il raccoglimento forzato raccogliendo x^2:

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{-2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}}+\frac{\ln^3(x)}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x^2}_{+\infty}\left(-2+\underbrace{\frac{\ln^3(x)}{x^2}}_{0}-\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{0}\right)$$

gerarchia infiniti

per sostituzione

$$= +\infty\cdot(-2+0-0) = +\infty\cdot(-2) = \boxed{-\infty}.$$

ASINTOTI OBLIQUI

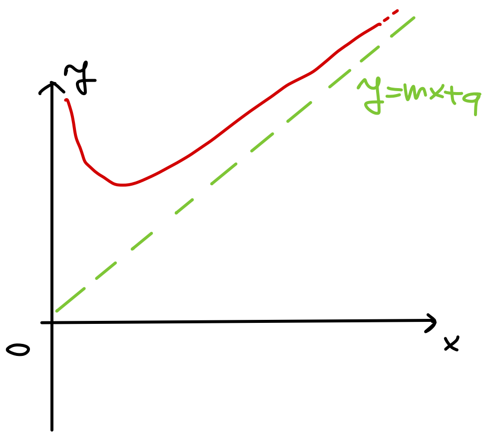
Ricordiamo che per una funzione f si dice che

- f ha un asintoto verticale per $x = x_0$ se $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$, con $x_0 \in \mathbb{R}$.

- f ha un asintoto orizzontale per $y = \ell$ se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$.

Def: f ha un asintoto obliquo di equazione $y = mx + q$ per $x \to \pm\infty$ se

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - (mx+q) \right] = 0.}$$



Ricordate che

$$y = mx + q$$

m = coefficiente angolare (pendenza della retta)

q = quota (ordinata del punto di intersezione con l'asse y)

Teorema:
La funzione f ha un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$ di equazione $y = mx + q$ se e solo se valgono queste 2 condizioni:

(1) $$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

(2) $$\lim_{x \to \pm\infty} \left[f(x) - mx \right] = q \in \mathbb{R}.$$

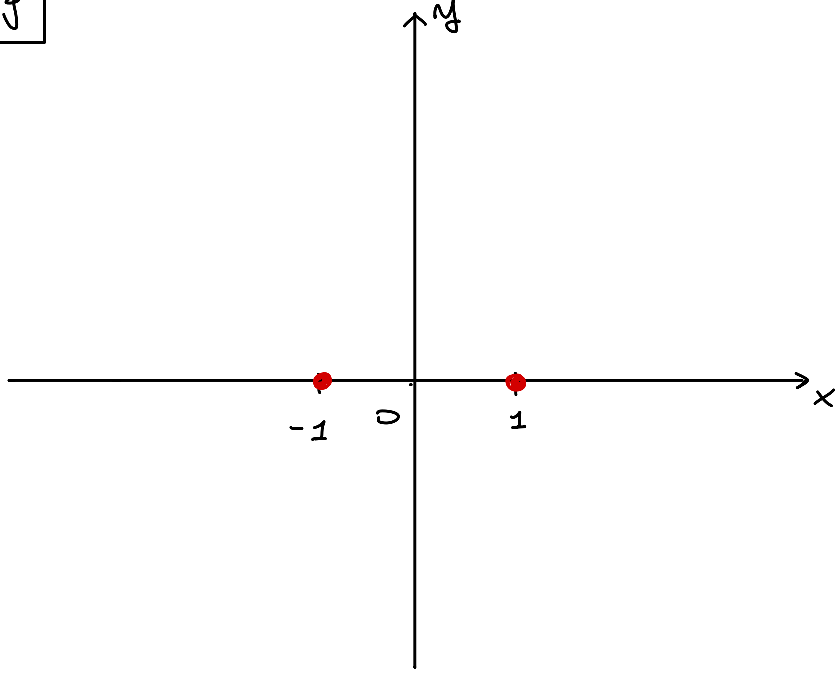
Esercizio 1 Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x}$$

determinarne: dominio, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno ed eventuali asintoti. Tracciarne poi un grafico qualitativo.

① DOMINIO: essendo una razionale fratta, il dominio si trova imponendo DENOMINATORE $\neq 0$ $\longrightarrow$ $x \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$



N.B: gli assi x e y non si tratteggiano mai!

② SIMMETRIE:

Calcoliamo $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x} = \frac{x^2-1}{-x} = -\frac{x^2-1}{x} = -f(x)$$

$\Rightarrow$ f è dispari

③ INTERSEZIONE ASSI:

- asse y: non ci possono essere intersezioni con l'asse y perché $0 \notin D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- asse x: risolviamo il sistema

$$\begin{cases} y = 0 & \leftarrow \text{asse } x \\ y = \dfrac{x^2-1}{x} \end{cases} \longrightarrow \cancel{x} \cdot \frac{x^2-1}{\cancel{x}} = \overbrace{0 \cdot x}^{0} \longrightarrow x^2 - 1 = 0$$

$\longrightarrow x^2 = 1 \longrightarrow x = -1 \vee x = 1$. Il grafico di f interseca l'asse x nei punti di ascissa $x = -1$ e $x = 1$.

④ SEGNO: risolviamo la disequazione $f(x) > 0$, cioè

$$\frac{x^2-1}{x} > 0$$

studiamo il segno di numeratore e denominatore, poi facciamo la linea dei segni:

N: $x^2-1 > 0 \longrightarrow x^2 > 1 \longrightarrow \boxed{x < -1 \ \vee \ x > 1}$

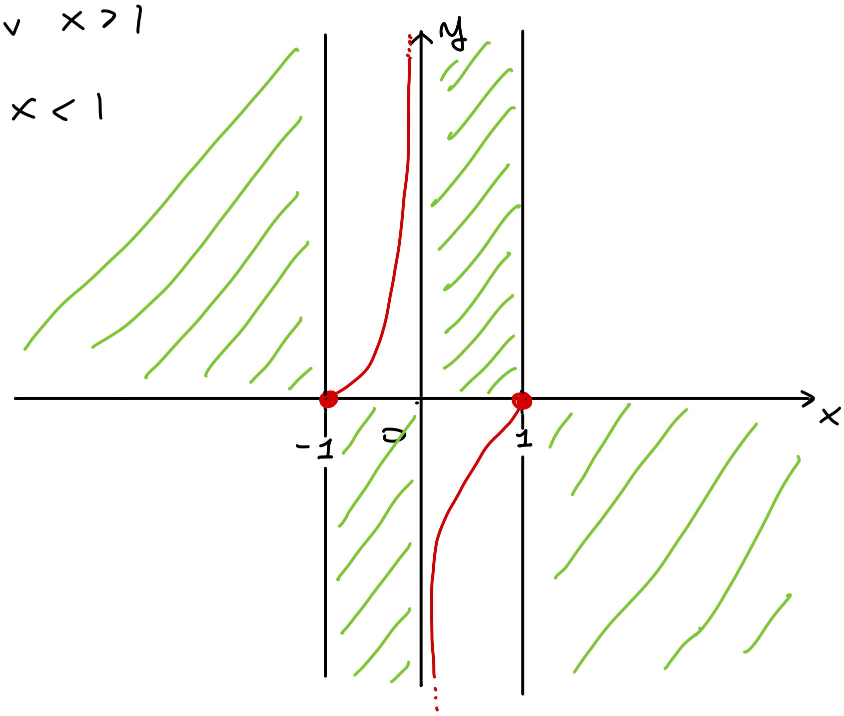
D: $\boxed{x > 0}$

	-1		0		1	
N	$+$		$-$	$-$		$+$
D	$-$		$-$	$+$		$+$
	$-$		$+$	$-$		$+$

Quindi

- $f(x) > 0$ se $-1 < x < 0 \ \vee \ x > 1$
- $f(x) < 0$ se $x < -1 \ \vee \ 0 < x < 1$

(in verde cancello le zone dove il grafico di f NON può comparire)



⑤ ASINTOTI:

1) VERTICALI: si cercano negli estremi del dominio che non appartengono al dominio.

$D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow x = 0$ CANDIDATO asintoto verticale

Per vedere se lo è calcoliamo $\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x)$:

X=0 ASINTOTO VERTICALE

- $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2-1}{x} = \frac{0-1}{0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\underbrace{\frac{1}{0^+}}_{=+\infty} = -\infty.$
- $\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2-1}{x} = \frac{0-1}{0^-} = \frac{-1}{0^-} = -\underbrace{\frac{1}{0^-}}_{=-\infty} = -(-\infty) = +\infty.$

□ ORIZZONTALI: calcoliamo $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x} = \frac{\infty}{\infty}$ F.I.

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(\cancel{\frac{x^2}{x^2}} - \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{1}{x^2}\right) = +\infty\left(1-\frac{1}{+\infty}\right) = +\infty(1-0) = +\infty$$

Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ significa che NON ci sono asintoti orizzontali per $x\to+\infty$.

Analogamente, con gli stessi calcoli,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \underset{\downarrow\,-\infty}{x}\left(1-\underset{\downarrow\,0}{\frac{1}{x^2}}\right) = -\infty,$$

cioè non ci sono asintoti orizzontali nemmeno a $-\infty$.

$\Rightarrow$ f non ha asintoti orizzontali.

□ OBLIQUI: ha senso cercare gli asintoti obliqui solo se non ci sono asintoti orizzontali, perché una funzione non può avere, per lo stesso infinito, un asintoto orizzontale e uno obliquo.

- Per $x\to+\infty$: si calcola, prima di tutto,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2-1}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x}\cdot\frac{1}{x}$$

DIVIDERE PER x = MOLTIPLICARE PER $\frac{1}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ F.I.}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right) = 1-0 = \boxed{1 =: m}$$

Adesso calcoliamo anche q:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx] \underset{(m=1)}{=} \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-1}{x}-x\right] = \frac{\infty}{\infty}-\infty \quad F.I.$$

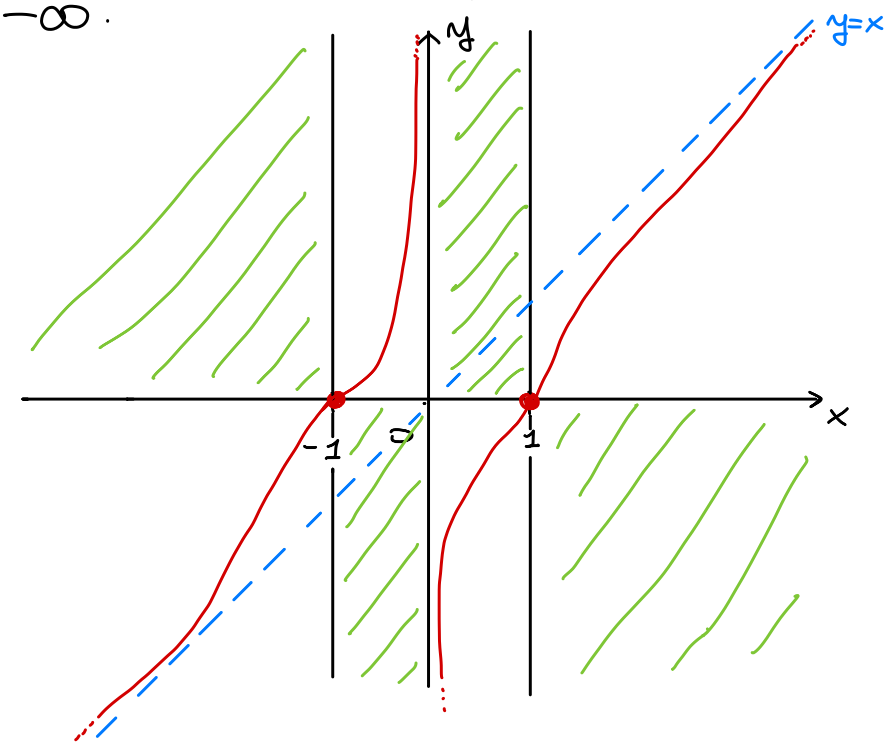
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1-x\cdot x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x} = \boxed{0=:q}$$

svolgo la sottrazione tra quadre

Allora per $x\to+\infty$ f ha un asintoto obliquo di equazione

$$y = 1\cdot x+0 \to y=x$$

- Per $x\to-\infty$ i calcoli sono identici, quindi $y=x$ è asintoto obliquo anche per $x\to-\infty$.



Perché è importante sapere che f è dispari?

Quando cerco gli asintoti, devo sempre calcolare 2 limiti per asintoto.

Se però f è dispari,

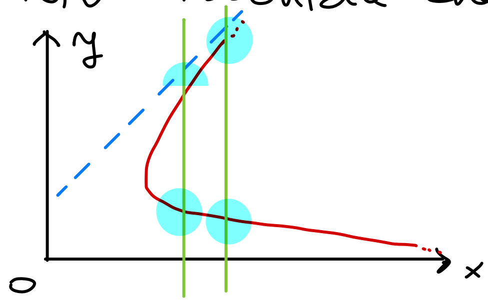
- se $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$, automaticamente $\lim_{x\to0^-} f(x) = +\infty$
- se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\ell$
- se $y=mx+q$ è asintoto obliquo per $x\to+\infty$, lo è anche per $x\to-\infty$.

In generale, se f è dispari, tutto quello che avviene per $x>0$ si può replicare per le $x<0$ a patto di cambiare i segni.

Se invece f è pari, basta studiare ciò che accade per $x>0$ e ricopiarlo per $x<0$ con un'unica eccezione: se $y=mx+q$ è asintoto obliquo per $x\to+\infty$, allora l'asintoto obliquo per $x\to-\infty$ è $y=-mx-q$.

Perché gli asintoti obliqui vanno cercati solo se non ci sono asintoti orizzontali? Non è possibile per lo stesso infinito, che una funzione abbia sia un asintoto orizzontale che uno obliquo.

Se infatti una curva avesse asintoto sia obliquo che orizzontale ad esempio per $x\to+\infty$, allora questa curva non potrebbe essere il grafico di una funzione (ci sono rette verticali che intersecano la curva più di una volta!).



Esercizio 2 Data la funzione

$$f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$$

determinare: dominio, simmetrie, intersezioni con gli assi, segno ed eventuali asintoti. Tracciare poi un grafico qualitativo.

① DOMINIO: DENOMINATORE $\neq 0 \longrightarrow e^x \neq 0$

Ricordiamo che l'esponenziale è sempre >0 quindi $e^x \neq 0$ $\forall x\in\mathbb{R} \longrightarrow$ il denominatore è SEMPRE $\neq 0$

$\Rightarrow \boxed{D=\mathbb{R}}$

② SIMMETRIE: calcoliamo $f(-x)$.

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{e^{-x}}=\frac{x^2+1}{e^{-x}}\neq \overbrace{\frac{x^2+1}{e^x}}^{f(x)},\ \overbrace{-\frac{x^2+1}{e^x}}^{-f(x)}$$

$\Rightarrow f$ non è né pari, né dispari.

③ INTERSEZIONE CON GLI ASSI:

- asse y: risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x = 0 & \leftarrow \text{asse } y \\ y = \dfrac{x^2+1}{e^x} \end{cases} \longrightarrow y = \frac{(0)^2+1}{\underbrace{e^0}_{=1}} = \frac{1}{1} = 1$$

cioè il grafico della funzione passa per il punto $(0, 1)$.

- asse x:

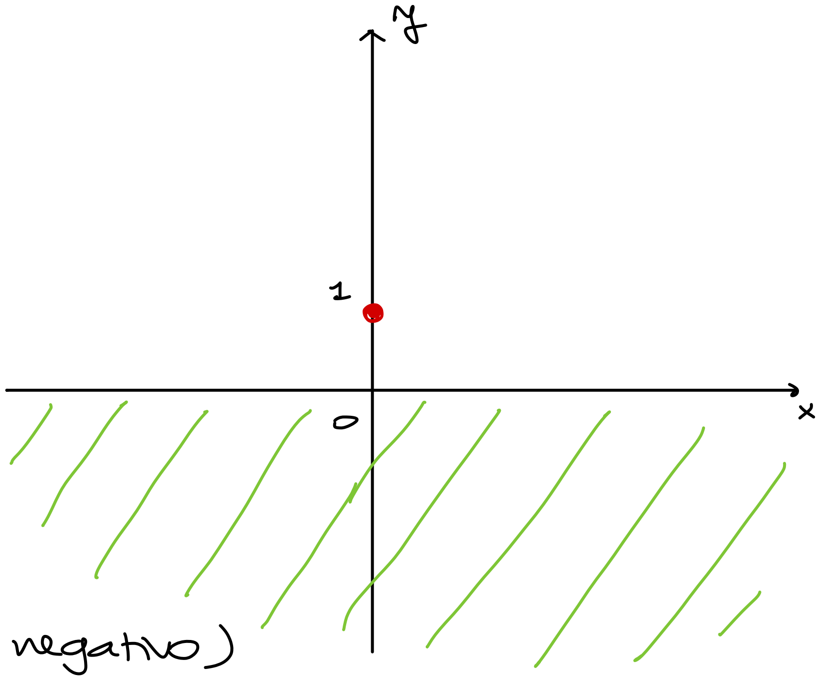
$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{x^2+1}{e^x} \end{cases} \rightarrow \frac{x^2+1}{e^x} = 0$$

$$\rightarrow \cancel{e^x} \cdot \frac{x^2+1}{\cancel{e^x}} = \overbrace{0 \cdot e^x}^{=0}$$

$$\rightarrow x^2+1 = 0 \rightarrow \underbrace{x^2}_{\text{POSITIVO}} = \overbrace{-1}^{\text{NEGATIVO}}$$

impossibile (un positivo non può essere uguale a un negativo)

$\Rightarrow f$ non interseca <u>mai</u> l'asse x



④ SEGNO: risolviamo la disequazione $f(x) > 0$.

$$\frac{x^2+1}{e^x} > 0$$

N: $x^2+1 > 0 \longrightarrow \overbrace{x^2}^{\text{POSITIVO}} > \underbrace{-1}_{\text{NEGATIVO}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$, perché un positivo è SEMPRE maggiore di un negativo

D: $e^x > 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, perché l'esponenziale è SEMPRE positiva

N	+	+	+
D	+	+	+
	+	+	+

$$\boxed{f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$ → Quindi cancello tutta la parte sotto l'asse x.

5) ASINTOTI:

- VERTICALI: visto che il dominio di f è $D = \mathbb{R}$, non ci sono asintoti verticali!

- ORIZZONTALI:

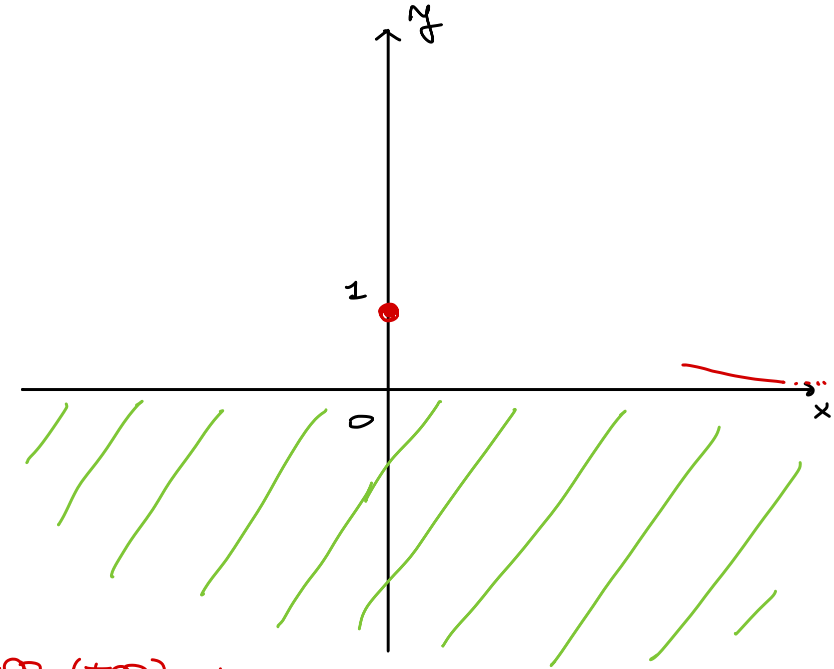
• $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{e^x} = \frac{+\infty+1}{e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad F.I.$$

usando la gerarchia degli infiniti, dato che

$$x^2+1 << e^x \quad \text{per } x \to +\infty,$$

quindi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1}{e^x} = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ asintoto orizzontale per } x \to +\infty$$



• $$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+1}{e^x} = \frac{(-\infty)^2+1}{\underbrace{e^{-\infty}}_{=0^+}} = \frac{+\infty+1}{0^+} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$

NON è una F.I.

$$\frac{1}{0^+} = +\infty \rightarrow \frac{+\infty}{0^+} = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$$

$\Rightarrow$ per $x \to -\infty$ f NON ha asintoti orizzontali

- OBLIQUI: li cercheremo solo per $x \to -\infty$, dato che per $x \to +\infty$ c'è un asintoto orizzontale.

Calcoliamo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}.$$ Se c'è un asintoto obliquo, questo limite fa $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2+1}{e^x}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{e^x}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x\,e^x}$$

$e^{-\infty}=0$

$$= \frac{+\infty+1}{-\infty\cdot 0} = \frac{+\infty}{-\infty\cdot 0} \quad 2\ \text{F.I.}: \ \frac{+\infty}{-\infty}\,,\ -\infty\cdot 0$$

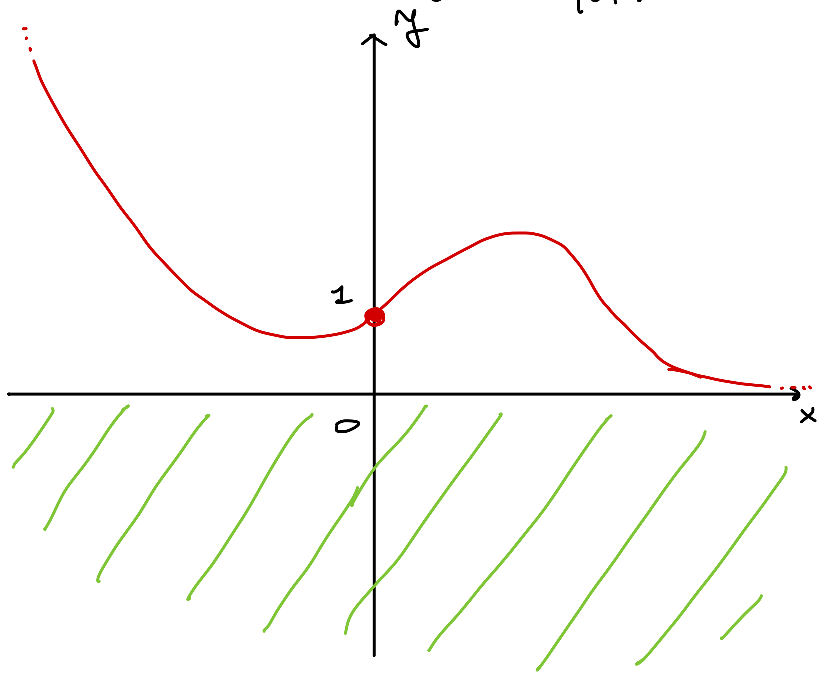
utilizzo la tecnica del raccoglimento forzato sulla x:

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(\cancel{\frac{x^2}{x^2}}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\,e^x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x}\,e^x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{e^x} = \frac{-\infty\left(1+\frac{1}{+\infty}\right)}{e^{-\infty}} = \frac{-\infty\,(1+0)}{0^+}$$

$$= \frac{-\infty}{0^+} = -\infty =: m$$

Poiché $m=-\infty$ NON ci sono asintoti obliqui.

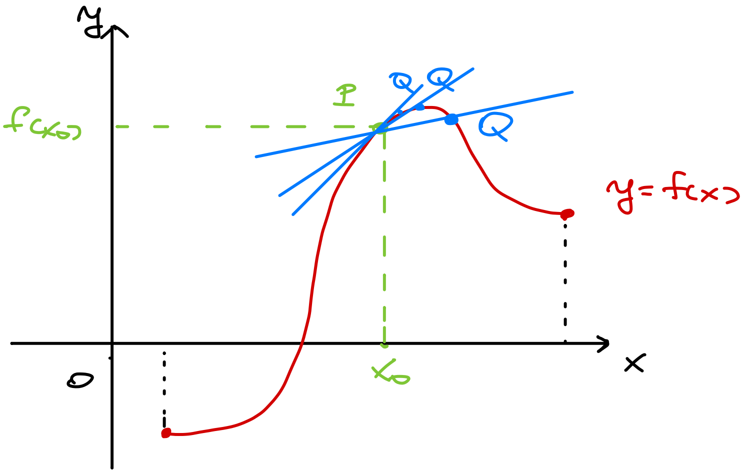


CAPITOLO 3: LE DERIVATE

Consideriamo una funzione

$$f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

e ne tracciamo il grafico.



Consideriamo poi un punto del grafico di f di coordinate

$$P\,(x_0, f(x_0))$$

ascissa

$y_0 = f(x_0)$ perché P sta nel grafico

Il mio intento è determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto P.

Non sempre è facile determinare la tangente per P, però è facile determinare una SECANTE al grafico se conosco i DUE punti per cui questa passa.

Consideriamo un altro punto Q del grafico. La secante al grafico di f nei punti P e Q è la retta per P e Q e ha equazione

$$\frac{y - y_Q}{y_Q - y_P} = \frac{x - x_Q}{x_Q - x_P}.$$

Conosco la secante per P e Q. Se sposto progressivamente il punto Q avvicinandolo a P, allora l'equazione della secante sarà sempre più simile all'equazione della tangente per P.

Concentriamoci non sull'equazione della retta, bensì sul suo coefficiente angolare. Il coefficiente angolare della secante per P e Q è dato da

$$m_{PQ} := \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}.$$

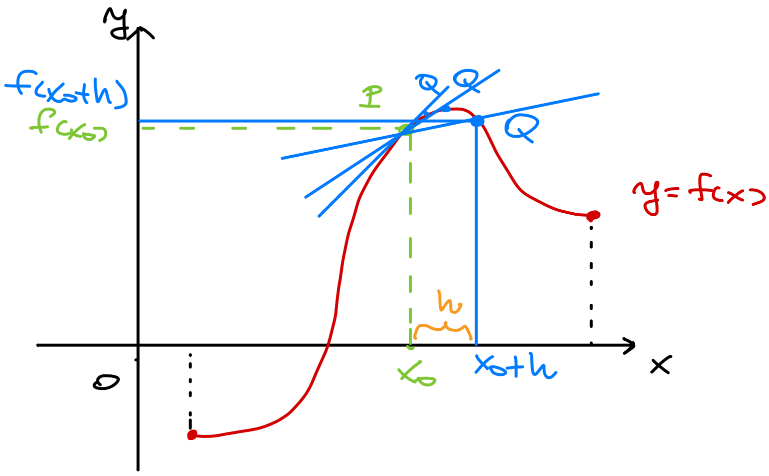
Quindi se avvicinando Q a P la secante per P e Q è sempre più "simile" alla tangente per P, possiamo dire che

$$m_t := \lim_{Q \to P} m_{PQ}$$

COEFFICIENTE ANGOLARE TANGENTE

Formalizziamo il ragionamento:
al generico punto Q assegno le coordinate

$$Q\left(x_0+h,\ f(x_0+h)\right)$$



dove h è detto incremento.
Ricordando che $P(x_0, f(x_0))$, il coefficiente angolare della secante al grafico per P e Q si scrive come

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{\overbrace{f(x_0+h)}^{y_Q} - \overbrace{f(x_0)}^{y_P}}{\underbrace{\cancel{x_0}+h}_{x_Q} - \underbrace{\cancel{x_0}}_{x_P}} = \boxed{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

RAPPORTO INCREMENTALE DI f RELATIVO A x_0

Abbiamo anche detto che se $Q \to P$, $m_{PQ} \to m_t$, dove m_t è il coefficiente angolare della tangente per P.
Se $Q \to P$ significa che $\underbrace{x_Q}_{x_0+h} \to \underbrace{x_P}_{x_0}$, cioè $x_0+h \to x_0$, quindi $\boxed{h \to 0}$.

In sostanza, $\lim\limits_{Q \to P} m_{PQ} = m_t$ si traduce così:

$$\boxed{m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

Il coefficiente angolare della tangente per il punto P di ascissa x_0 è il limite del rapporto incrementale di f relativo a x_0.

Def: sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto interno a I (cioè non un estremo dell'intervallo I).
Si dice che f è derivabile in x_0 se il limite del rapporto incrementale di f relativo a x_0 ESISTE FINITO.
In tal caso quel limite è la derivata di f in x_0 e si scrive

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)}$$

Riassumendo, la derivata di f in x_0 è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = x_0$.

Esempio: quanto vale la derivata di $f(x) = x^2 - x$ in $x_0 = 3$?

si calcola il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^2 - (3+h) - [3^2 - 3]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{9 + 6h + h^2 - 3 - h - [9-3]}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{9} + 6h + h^2 \cancel{- 3} - h \cancel{- 6}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 5h}{h} = \frac{0}{0} \quad \text{F.I.}$$

Scomponiamo il numeratore: raccogliamo h

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(h+5)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (h+5) = 0 + 5 = 5$$

$$\Rightarrow f'(3) = 5.$$

Si può ottenere la derivata di f anche in un generico x: questa si chiama funzione derivata di f e si indica con $f'(x)$:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

Esempio: determiniamo la derivata di $f(x) = 4x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{4 \cdot (x+h)^2 - 4x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4(x^2 + 2hx + h^2) - 4x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{4x^2} + 8hx + 4h^2 \cancel{- 4x^2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{8hx + 4h^2}{h} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(8x + 4h)}{\cancel{h}} = 8x + 4 \cdot 0 = 8x \Rightarrow \boxed{f'(x) = 8x}$$

utilizzando il limite del rapporto incrementale come nell'esempio precedente si trovano le derivate delle funzioni elementari:

1) $f(x)=k$, $k\in\mathbb{R}$ (costante) $\Rightarrow f'(x)=0$

Ad esempio: $f(x)=3 \rightarrow f'(x)=0$

2) $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$

3) $f(x)=x^2 \Rightarrow f(x) = 2x$

4) Più in generale se $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\boxed{f(x) = x^{\alpha} \quad \Rightarrow f'(x) = \alpha\cdot x^{\alpha-1}}$$

Esempi:

- $\alpha=1$: $f(x)=x \longrightarrow f'(x)= 1\cdot x^{1-1} = 1\cdot x^0 = 1$
- $\alpha=2$: $f(x)=x^2 \longrightarrow f'(x)=2\cdot x^{2-1} = 2x$
- $\alpha=4$: $f(x)=x^4 \longrightarrow f'(x)=4x^3$
- $\alpha=-3$: $f(x)=x^{-3}=\dfrac{1}{x^3} \longrightarrow f'(x)=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}=-\dfrac{3}{x^4}$
- $\alpha=\dfrac{1}{3}$. $f(x)=x^{1/3}=\sqrt[3]{x} \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}=\dfrac{1}{3}x^{-2/3}$

$$=\frac{1}{3}\,\frac{1}{x^{2/3}}=\frac{1}{3}\,\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Ricorda: $x^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{x^n}$

5) $f(x)=\sin(x) \longrightarrow f'(x)=\cos(x)$

6) $f(x)=\cos(x) \longrightarrow f'(x)=-\sin(x)$

7) $f(x)=a^x \longrightarrow f'(x)=a^x\cdot\ln(a)$

In particolare se $a=e$, visto che $\ln(e)=1$

$$\boxed{f(x)=e^x \longrightarrow f'(x)=e^x}$$

8) $f(x)=\log_a(x) \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}\log_a(e)$

In particolare se $a=e$, visto che $\log_e(e)=\ln(e)=1$

$$\boxed{f(x)=\ln(x) \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{x} \quad (\text{per } x>0)}$$

In quali punti posso calcolare le derivate delle funzioni elementari? Cioè in quali punti queste funzioni sono derivabili?

COSTANTI
POTENZE
SENO
COSENO
ARCOTANGENTE
ESPONENZIALE

$\left.\begin{array}{l}\text{COSTANTI}\\ \text{POTENZE}\\ \text{SENO}\\ \text{COSENO}\\ \text{ARCOTANGENTE}\\ \text{ESPONENZIALE}\end{array}\right\}$ derivabili in $\mathbb{R}$

LOGARITMO $\longrightarrow$ derivabile nel suo dominio $(0,+\infty)$

RADICE $f(x)=\sqrt[n]{x} \longrightarrow$ derivabile in $D\setminus\{0\}$.

REGOLE DI DERIVAZIONE:

1) $(f(x)\pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

$$y=\sin(x)-x^3+1 \longrightarrow y' = \cos(x) - 3x^2 + 0$$

$\cos(x) \quad 3x^2 \quad 0$

$$= \cos(x) - 3x^2$$

2) Per $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\quad (k\cdot f(x))' = k\cdot f'(x)$

$$y=8x^3 \longrightarrow y' = 8(x^3)' = 8\cdot 3x^2 = 24x^2$$

Esercizio 1 Calcolare la derivata di

$$y = 3x^2 + 4\ln(x) - \frac{5}{\sqrt{x}}$$

$$\rightarrow y' = (3x^2)' + (4\ln(x))' - \left(\frac{5}{\sqrt{x}}\right)'$$

$$= 3(x^2)' + 4(\ln(x))' - 5\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$$

$$= 3\cdot 2x + 4\cdot\frac{1}{x} - 5\left(-\frac{1}{2}x^{-1/2-1}\right)$$

$$= 6x + \frac{4}{x} + \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}}$$

$$= 6x + \frac{4}{x} + \frac{5}{2\sqrt{x^3}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}} = x^{-1/2}$$

$$-\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

$$x^{-3/2} = \frac{1}{x^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

3) La derivata del prodotto NON è il prodotto delle derivate ma

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Esempi:

- $y = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g(x)}$

$f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1$

$g(x) = \sin(x) \longrightarrow g'(x) = \cos(x)$

$\longrightarrow y' = 1 \cdot \sin(x) + x \cdot \cos(x) = \sin(x) + x\cos(x)$

- $y = \underbrace{e^x}_{f} \cdot \underbrace{\sqrt{x}}_{g}$

$f(x) = e^x \longrightarrow f'(x) = e^x$

$g(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \longrightarrow g'(x) = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\longrightarrow y' = e^x \cdot \sqrt{x} + e^x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$= e^x\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

4) Derivata del rapporto:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Esempi:

- $y = \frac{x^2+3}{x-1}$

$f(x) = x^2+3 \longrightarrow f'(x) = 2x+0 = 2x$

$g(x) = x-1 \longrightarrow g'(x) = 1+0 = 1$

$\longrightarrow y' = \frac{2x(x-1) - (x^2+3)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2 - 3}{(x-1)^2}$

$= \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$

- $y = tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$f(x) = \sin(x) \longrightarrow f'(x) = \cos(x)$

$g(x) = \cos(x) \longrightarrow g'(x) = -\sin(x)$

$\longrightarrow y' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

5) Derivata del reciproco:

$$y = \frac{1}{f(x)} \longrightarrow y' = ?$$

Uso la formula per la derivata del rapporto:

$$\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = \frac{0 \cdot f(x) - 1 \cdot f'(x)}{[f(x)]^2}$$

N: $1 \longrightarrow (1)' = 0$

D: $f(x) \longrightarrow f'(x)$

$$= -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$$

Esempio:

$$y = \frac{1}{x^2+1} \longrightarrow y' = -\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

$$(x^2+1)' = (x^2)' + (1)' = 2x + 0 = 2x$$

N.B: $\boxed{y = \operatorname{arctg}(x) \longrightarrow y' = \frac{1}{x^2+1}}$

Derivabilità e punti di singolarità

Abbiamo visto che $f(x) = \sqrt[3]{x}$ è definita e continua in $\mathbb{R}$, tuttavia

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x})' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

non è definita per $x=0$, perché il denominatore si annulla in $x=0$. Quindi, indicando con D_f il dominio di f e con $D_{f'}$ il dominio di f', si ha che

$$0 \in D_f \quad \text{ma} \quad 0 \notin D_{f'}.$$

Se $x_0 \in D_{f'}$, allora f è derivabile in x_0.

Se invece $x_0 \notin D_{f'}$, allora f NON è derivabile in x_0:
in tal caso si dice che x_0 è un punto di non derivabilità
oppure un punto di singolarità per f.

In generale

$$D_{f'} \subseteq D_f$$

ma può accadere anche che $D_{f'} \subset D_f$, come per $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Come capisco se un punto è di singolarità?

Def: sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$.

- La derivata destra di f in x_0 è

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

- La derivata sinistra di f in x_0 è

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Teorema:
Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$. Allora

f è derivabile in x_0 $\iff$ derivata destra e derivata sinistra di f in x_0 esistono FINITE e UGUALI

Ad esempio, per $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in $x_0 = 0$ si ha che

$$f'_-(0) = f'_+(0) = +\infty \implies f \text{ non derivabile in } x_0 = 0.$$

(non mostriamo i calcoli)

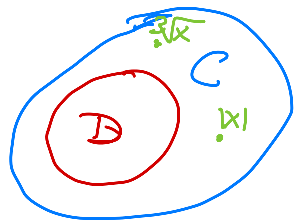
Tuttavia f è continua in $x_0 = 0$. Allora ci chiediamo
"che rapporto c'è tra continuità e derivabilità?"

Teorema:

Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia x_0 punto interno di I (si scrive $x_0 \in \mathring{I}$).

Allora

$$f \text{ derivabile in } x_0 \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} f \text{ continua in } x_0.$$



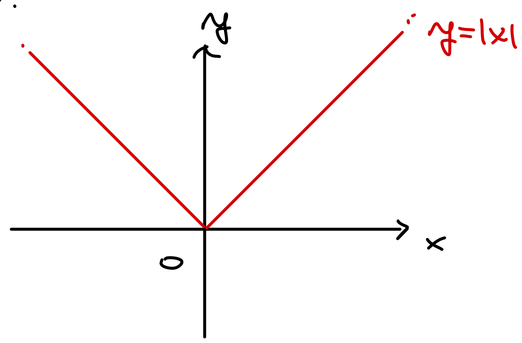
Riassumendo, per $x_0 \in \mathring{I}$, ogni funzione derivabile in x_0 è anche continua; invece non è vero il viceversa, perché esistono funzioni continue ma non derivabili.

Esempi (funzioni continue ma non derivabili):

1) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ già visto: continua ma non derivabile in $x=0$.

2) Consideriamo $f(x) = |x|$ e $x_0 = 0$.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Studiamo la continuità in $x_0 = 0$:

calcoliamo

- $f(0) = |0| = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} |x| = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} |x| = \lim\limits_{x \to 0} (-x) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$$\Downarrow$$

f è continua in $x_0 = 0$

Studiamone ora la derivabilità in $x_0 = 0$. Calcoliamo derivata destra e derivata sinistra.

- $$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{|h|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} 1 = 1 \Rightarrow \boxed{f'_+(0) = 1}$$

- $f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{|h|}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} (-1) = -1 \Rightarrow \boxed{f'_-(0) = -1}$$

se $h<0$ $|h|=-h$

Abbiamo concluso che $f'_+(0) = 1 \neq f'_-(0) = -1$, quindi f non è derivabile in $x_0=0$.

Quindi f presenta un punto di singolarità in $x_0=0$: questo tipo di singolarità, dove derivata destra e derivata sinistra sono finite ma diverse si chiama punto angoloso.

Derivata delle funzioni composte

Consideriamo due funzioni $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che la composizione $f \circ g$ esista.

Ricordiamo che

$$(f\circ g)(x) = f(g(x)) \quad \forall x \in J.$$

Se g è derivabile in $x_0 \in \mathring{J}$ e f è derivabile in $z_0 = g(x_0)$, allora

$$f \circ g \text{ è derivabile in } x_0$$

e inoltre si ha che

$$(f\circ g)'(x_0) = f'(z_0)\cdot g'(x_0) = f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$$

Esempi:

- $f(x) = x^4$, $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$

Allora

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^4 = (2x^3 - 3x^2 + x - 1)^4$

$\longrightarrow (f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

$f'(x) = 4x^3$

$g'(x) = 2\cdot 3x^2 - 3\cdot 2x + 1$
$= 6x^2 - 6x + 1$

$= 4(g(x))^3 \cdot g'(x)$

$= \boxed{4(2x^3-3x^2+x-1)^3 (6x^2-6x+1)}$

• Calcolare la derivata di $y = \ln(2x^2 - x - 1)$.

Occorre riconoscere $f(x)$ e $g(x)$ che compongono la funzione.

$$f(x) = \ln(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = 2x^2 - x - 1 \longrightarrow g'(x) = 4x - 1$$

Allora

$$y' = \left(\ln(2x^2 - x - 1)\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{1}{2x^2 - x - 1} \cdot (4x - 1) = \boxed{\frac{4x-1}{2x^2 - x - 1}}$$

Esercizio 1 Calcolare la derivata di

$$y = 2\sin(5x)$$

$$y' = (2 \cdot \sin(5x))' = 2 \cdot (\sin(5x))'$$

Calcoliamo la derivata di $\sin(5x)$, che è una funzione composta

$$\sin(5x) = f(g(x))$$

con $f(x) = \sin(x) \longrightarrow f'(x) = \cos(x)$

$g(x) = 5x \longrightarrow g'(x) = 5$

Allora

$$(\sin(5x))' = \cos(5x) \cdot 5 = 5\cos(5x)$$

$$\Rightarrow y' = (2\sin(5x))' = 2(\sin(5x))' = 2 \cdot 5 \cdot \cos(5x) = \boxed{10\cos(5x)}$$

Esercizio 2 Calcolare la derivata di $y = e^{x^2 - 3x + 2}$.

Notiamo che

$$e^{x^2 - 3x + 2} = f(g(x))$$

con $f(x) = e^x \longrightarrow f'(x) = e^x$

$g(x) = x^2 - 3x + 2 \longrightarrow g'(x) = 2x - 3$

Quindi, $y' = (e^{x^2 - 3x + 2})' = \boxed{e^{x^2 - 3x + 2} \cdot (2x - 3)}$

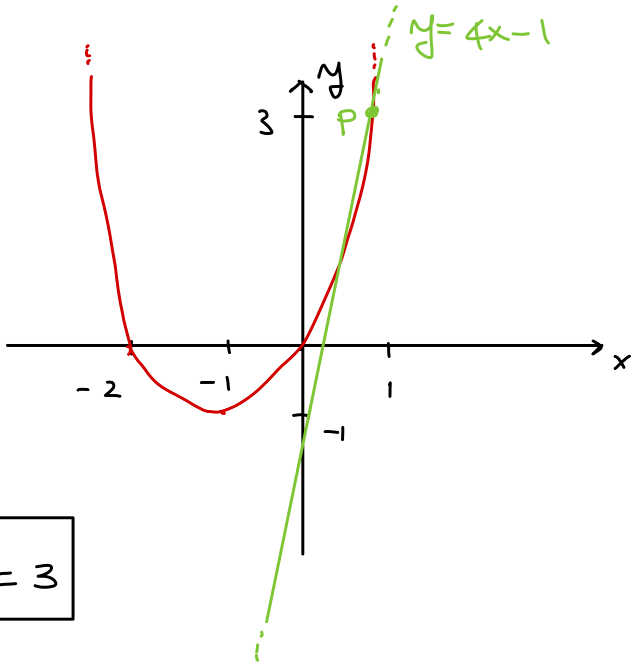
$$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Retta tangente al grafico di una funzione

Abbiamo detto che la derivata di una funzione è il coefficiente angolare della retta tangente.

Se f è derivabile in x_0, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa x_0 è data da

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$



Esempio: sia $f(x) = x^2 + 2x$.

Vogliamo determinare l'equazione della retta tangente nel punto di ascissa $x_0 = 1$.

Utilizzo la formula vista sopra:

- determiniamo $f(x_0)$.

  $f(1) = (1)^2 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3 \rightarrow \boxed{f(x_0) = 3}$

- determiniamo $f'(x)$.

  $f(x) = x^2 + 2x \longrightarrow f'(x) = 2x + 2$

- determiniamo $f'(x_0)$.

  $f'(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 2 + 2 = 4 \longrightarrow \boxed{f'(1) = 4}$

Posso ora determinare l'equazione della retta tangente:

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$\rightarrow y - 3 = 4(x - 1) \longrightarrow y - 3 = 4x - 4 \longrightarrow y = 4x - 4 + 3$

$\longrightarrow \boxed{y = 4x - 1}$

Esercizio 1 Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}$$

nel punto di ascissa $x_0 = 2$.

Prima di tutto calcoliamo

$$f(x_0) = f(2) = \frac{2^2 - 3 \cdot 2 + 2}{2 - 3} = \frac{4 - 6 + 2}{-1} = \frac{0}{-1} = 0 \rightarrow f(2) = 0$$

Adesso calcoliamo $f'(x)$. usiamo la formula della derivata del rapporto.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3} \quad \begin{matrix}]N \rightarrow (x^2 - 3x + 2)' = 2x - 3 \\ ]D \rightarrow (x - 3)' = 1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow f'(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)' \cdot (x - 3) - (x - 3)'(x^2 - 3x + 2)}{(x - 3)^2}$$

$$= \frac{(2x - 3)(x - 3) - 1 \cdot (x^2 - 3x + 2)}{(x - 3)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 6x \cancel{-3x} + 9 - x^2 \cancel{+3x} - 2}{(x - 3)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 6x + 7}{(x - 3)^2}$$

Adesso calcoliamo $f'(x_0)$:

$$f'(2) = \frac{(2)^2 - 6 \cdot 2 + 7}{(2 - 3)^2} = \frac{4 - 12 + 7}{(-1)^2} = \frac{-1}{+1} = -1$$

$$\rightarrow f'(2) = -1$$

Applicando la formula, la retta tangente cercata ha equazione

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\rightarrow y - 0 = -1(x - 2) \rightarrow y = -(x - 2) \rightarrow \boxed{y = -x + 2}$$

Esercizio 2 Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di

$$f(x) = \sqrt{5x^2-1}$$

nel punto di ascissa $x_0=1$.

Determiniamo $f(x_0)$:

$$f(x_0)=f(1)= \sqrt{5\cdot 1-1} = \sqrt{4} = 2 \longrightarrow f(x_0)=2$$

Calcoliamo $f'(x)$: f è una funzione composta

$$f(x) = \sqrt{5x^2-1} = (h\circ g)(x) = h(g(x))$$

$$h(x)=\sqrt{x} = x^{1/2} \longrightarrow h'(x) = \frac{1}{2} x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$g(x)= 5x^2-1 \longrightarrow g'(x) = 10x$$

Dunque,

$$f'(x)= h'(g(x))\cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x)$$

$$= \frac{\overset{5}{\cancel{10}}x}{\cancel{2}\sqrt{5x^2-1}} = \frac{5x}{\sqrt{5x^2-1}}.$$

Pertanto,

$$f'(x_0)= f'(1) = \frac{5\cdot 1}{\sqrt{5\cdot 1^2-1}} = \frac{5}{2} \longrightarrow f'(x_0) = \frac{5}{2}$$

L'equazione della retta tangente cercata è

$$y- f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0)$$

$$\longrightarrow y-2 = \frac{5}{2}(x-1) \longrightarrow y-2= \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$$

$$-\frac{5}{2}+2 = \frac{-5+4}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow y= \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}+2 \longrightarrow \boxed{y= \frac{5}{2}x-\frac{1}{2}}$$

Esercizio 3 Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x + 1$$

nel punto di ascissa $x_0 = 3$.

Abbiamo che

$$f(x_0) = f(3) = \frac{1}{\cancel{3}}\, 3^{\cancel{3}\,2} - 3\cdot 3^2 + 9\cdot 3 + 1 = 9 - \cancel{27} + \cancel{27} + 1 = 10$$

e che

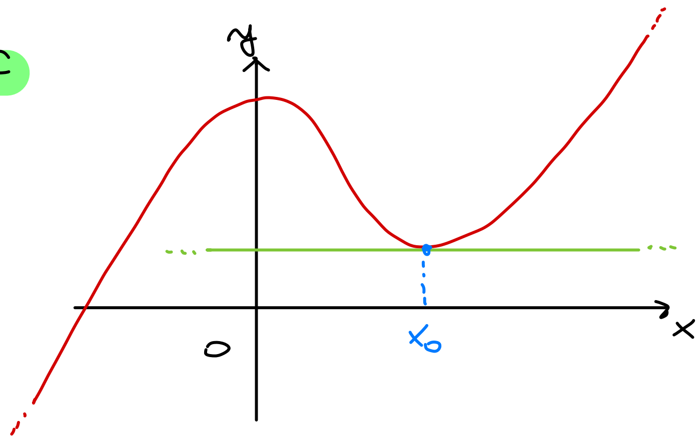
$$f'(x) = \frac{1}{\cancel{3}}\cdot \cancel{3}x^2 - 3\cdot 2x + 9 = x^2 - 6x + 9$$

$$\rightarrow f'(3) = 3^2 - 6\cdot 3 + 9 = 9 - 18 + 9 = 0 \rightarrow \boxed{f'(3) = 0}$$

Allora l'equazione della retta tangente è

$$y - 10 = 0\cdot(x-3) \rightarrow y - 10 = 0 \rightarrow \boxed{y = 10} \leftarrow \text{RETTA ORIZZONTALE}$$

N.B: quando $f'(x_0) = 0$ la tangente a f nel punto di ascissa $x = x_0$ è una retta orizzontale.



Def: un punto $x = x_0$ in cui

$$f'(x_0) = 0$$

si chiama **punto critico** (o **stazionario**) per f.

I punti stazionari / critici si trovano risolvendo l'equazione

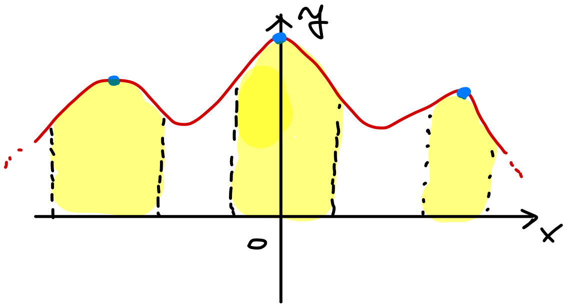
$$f'(x) = 0.$$

TEOREMI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

Def: sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in I$. Diciamo che

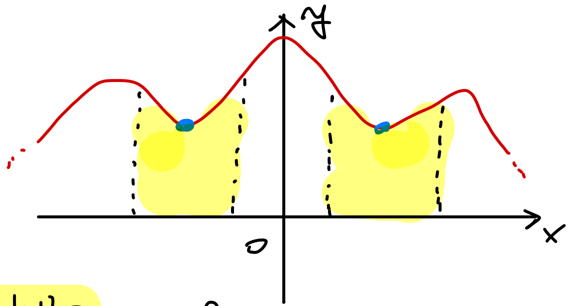
- $x = x_0$ è un punto di massimo relativo per f se $\exists J \subseteq I$ con $x_0 \in J$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in J.$$



- $x = x_0$ è un punto di minimo relativo per f se $\exists J \subseteq I$ con $x_0 \in J$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in J$$

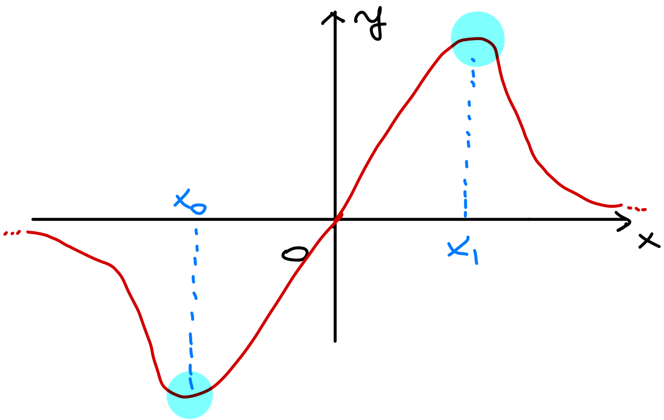


- $x = x_0$ è un punto di massimo assoluto per f in I se

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in I$$

- $x = x_0$ è un punto di minimo assoluto per f in I se

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in I$$



x_0 punto di minimo assoluto

x_1 punto di massimo assoluto

Teorema di Fermat

Sia $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) e sia $x_0 \in (a,b)$.

Se $x = x_0$ è un punto di massimo o minimo relativo per f, allora $x = x_0$ è un punto critico per f (cioè $f'(x_0) = 0$).

Osservazioni:

- x_0 deve essere un punto INTERNO ad $[a,b]$, cioè $x_0 \in (a,b)$.
- il Teorema di Fermat dice che massimi e minimi vanno ricercati tra i punti critici, ma non è detto che ogni punto critico è un massimo o un minimo!

Esempio (punto critico che non è né massimo, né minimo):

Consideriamo $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^3$.

Determiniamo i suoi punti critici risolvendo

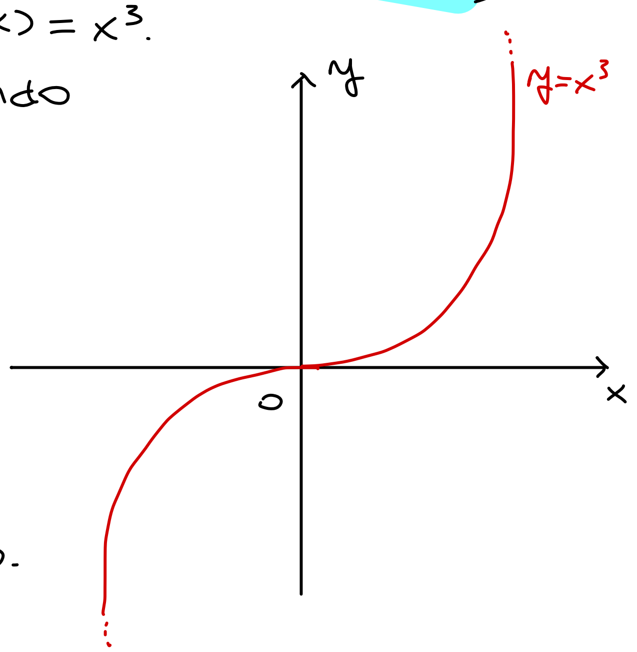
$$f'(x) = 0.$$

$$f(x) = x^3 \longrightarrow f'(x) = 3x^2$$

Quindi

$$f'(x) = 0 \longrightarrow 3x^2 = 0 \longrightarrow x^2 = 0$$

$$\longrightarrow \boxed{x = 0}$$



cioè l'unico punto critico di f è $x = 0$.

Tuttavia, $x = 0$ non è né massimo, né minimo per f perché

- $f(x) > f(0) = 0 \quad \forall x > 0$
- $f(x) < f(0) = 0 \quad \forall x < 0$

} non riesco a individuare un intervallo J contenente 0 che renda vera la definizione di max / min.

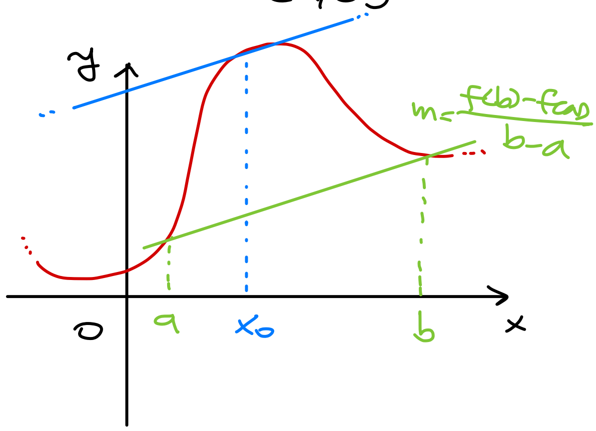
Quindi se trovare i punti critici non è sufficiente al fine di determinare massimi e minimi, come capisco se un punto critico è massimo, minimo o nessuno dei due?

Teorema di Lagrange

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)

Allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



Conseguenza del Teorema di Lagrange:

Consideriamo $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che sia continua in I e derivabile in $\mathring{I}$.

Siano poi $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Applichiamo il Teorema di Lagrange a f nell'intervallo $[x_1, x_2]$: si ha che $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$\boxed{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c).}$$

□ se $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in \mathring{I}$, allora essendo $x_2 > x_1$, cioè $x_2 - x_1 > 0$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\underbrace{x_2-x_1}_{>0}} = \underbrace{f'(c)}_{>0}$$

necessariamente anche $f(x_2)-f(x_1) > 0$ cioè $f(x_1) < f(x_2)$.

Ma allora ho dimostrato che

$$f'(x) > 0 \implies \underbrace{\forall x_1, x_2 \in I \text{ con } x_1 < x_2 \text{ risulta } f(x_1) < f(x_2)}_{f \text{ CRESCENTE}}$$

quindi

$$\boxed{f'(x) > 0 \;\; \forall x \in \mathring{I} \implies f \text{ crescente in } I}$$

□ se $f'(x) < 0 \;\; \forall x \in \mathring{I}$ ragionando come sopra si ottiene che $\forall x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) > f(x_2)$, ovvero

$$\boxed{f(x) < 0 \;\; \forall x \in \mathring{I} \implies f \text{ decrescente in } I}$$

Teorema (criterio per massimi e minimi)

Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in $\mathring{I}$.
Se $x_0 \in \mathring{I}$ è un punto critico per f, allora

(1) se in $x = x_0$ f passa dall'essere crescente all'essere decrescente, allora $x = x_0$ è un punto di massimo relativo per f;

(2) se in $x = x_0$ f passa dall'essere decrescente all'essere crescente, allora $x = x_0$ è un punto di minimo relativo per f;

(3) se in $x = x_0$ f non cambia la propria monotonia, allora $x = x_0$ non è né un punto di massimo, né un punto di minimo.

Esercizio

Determinare i punti critici di $f(x) = x^3 - 3x$ e classificarli.

1) Troviamo i punti critici di f risolvendo $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \to 3x^2 - 3 = 0 \to \frac{3x^2}{3} = \frac{3}{3} \to x^2 = 1$

$\to \boxed{x = -1 \vee x = 1}$ punti critici di f

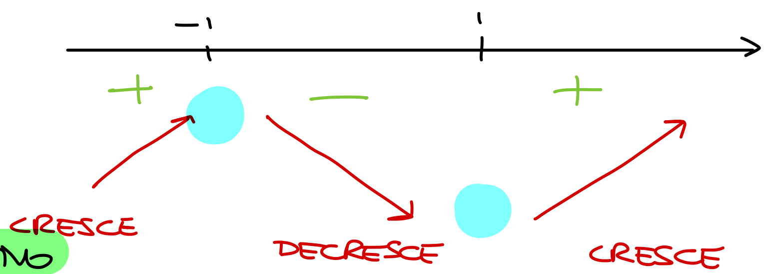
2) Studiamo crescenza e decrescenza di f risolvendo la disequazione $f'(x) > 0$.

$f'(x) > 0 \to 3x^2 - 3 > 0 \to \frac{3x^2}{3} > \frac{3}{3} \to x^2 > 1 \to x < -1 \vee x > 1$

Quindi:

- se $x < -1 \vee x > 1$, $f'(x) > 0$, cioè f crescente
- se $-1 < x < 1$, $f'(x) < 0$, cioè f decrescente

Allora.



□ in $x = -1$ f passa da crescente a decrescente

$\Rightarrow$ $x = -1$ punto massimo relativo

□ in $x = 1$ f passa da decrescente a crescente

$\Rightarrow$ $x = 1$ punto minimo relativo