Compito del 31/01/2025

Corso di MATEMATICA per il Corso di Laurea Triennale in SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI
Docente: Alessio Barbieri, **E-mail:** alessio.barbieri@unitus.it

Nome e Cognome: ....
Numero di Matricola: ....
Tempo: 3 ore. Non sono ammesse calcolatrici, appunti personali o libri. Riportare le risposte nel presente foglio negli appositi riquadri. Consegnare anche i fogli a protocollo.

Esercizio	D1	D2	E1	E2	E3	Σ
Voto						

Domanda 1. (3 punti) Indicare quale delle seguenti è la definizione di successione $(a_n)_n$ divergente a $+\infty$:

$\boxed{a}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$,

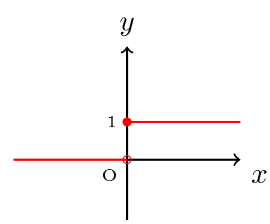
$\boxed{b}$ $\forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ a_n < -M\ \forall n \geq n_0$,

$\boxed{c}$ $\forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < M\ \forall n \geq n_0$,

$\boxed{d}$ $\forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ a_n > M\ \forall n \geq n_0$.

Domanda 2. (3 punti) La funzione "gradino di Heaviside" $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, di cui sotto sono riportate legge di definizione e grafico,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$



è un esempio di funzione che soddifa una delle seguenti proprietà nell'intervallo $[-1, 1]$. Quale?

$\boxed{a}$ E' una funzione integrabile ma che non ammette primitiva,
$\boxed{b}$ E' una funzione non integrabile ma che non ammette primitiva,
$\boxed{c}$ E' una funzione non continua, quindi non integrabile,
$\boxed{d}$ E' una funzione integrabile e che ammette primitiva.

Esercizio 1. (8 punti) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos^2(x) + b \cdot \sin(x), & x < 0, \\ -\dfrac{2}{x+1}, & x \geq 0. \end{cases}$$

determinare i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ affinché f sia continua e derivabile in $\mathbb{R}$.

Soluzione: $\boxed{a = \qquad , b = \qquad}$

Esercizio 2. (8 punti) Risolvere il seguente integrale

$$\int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{1}{2}} e^{3x+2} \, \mathrm{d}x.$$

Soluzione:

Esercizio 3. (10 punti) Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x}$$

determinarne: dominio, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, eventuali asintoti ed eventuali massimi e minimi. Tracciarne infine un grafico qualitativo qui sotto.

SVOLGIMENTO:

Domanda 1. (3 punti) Indicare quale delle seguenti è la definizione di successione $(a_n)_n$ divergente a $+\infty$:

$\boxed{a}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0,$

$\boxed{b}$ $\forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ a_n < -M\ \forall n \geq n_0,$

$\boxed{c}$ $\forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < M\ \forall n \geq n_0,$

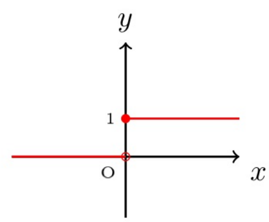
$\cancel{\boxed{d}}$ $\forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ a_n > M\ \forall n \geq n_0.$

$\boxed{a}$ e $\boxed{c}$ sono la definizione di successione convergente, benché la versione $\boxed{c}$ non sia formalmente corretta (M è una quantità grande e non piccola come ε).

$\boxed{b}$ è la definizione di successione divergente a $-\infty$.

Domanda 2. (3 punti) La funzione "gradino di Heaviside" $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, di cui sotto sono riportate legge di definizione e grafico,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$



è un esempio di funzione che soddifa una delle seguenti proprietà nell'intervallo $[-1, 1]$. Quale?

$\cancel{\boxed{a}}$ E' una funzione integrabile ma che non ammette primitiva,
$\boxed{b}$ E' una funzione non integrabile ma che non ammette primitiva,
$\boxed{c}$ E' una funzione non continua, quindi non integrabile,
$\boxed{d}$ E' una funzione integrabile e che ammette primitiva.

Che questa funzione non ammette primitive è stato mostrato a pag. 15 delle "Lezioni 11-12-13", mentre il fatto che sia integrabile è stato mostrato a pag. 31 di "Lezioni 11-12-13".

Inoltre,

$\boxed{b}$ FALSA (vedi pag 31)

$\boxed{d}$ FALSA (vedi pag 15)

$\boxed{c}$ FALSA perché una funzione non continua può essere integrabile e per mostrarlo, a lezione, abbiamo preso proprio questo esempio.

Esercizio 1. (8 punti) Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \cos^2(x) + b \cdot \sin(x), & x < 0, \\ -\dfrac{2}{x+1}, & x \geq 0. \end{cases}$$

determinare i valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ affinché f sia continua e derivabile in $\mathbb{R}$.

Soluzione: $\boxed{a = -2\,,\, b = 2}$

La funzione f è definita a tratti. Le due singole definizioni sono continue e derivabili negli intervalli in cui sono state considerate. Quindi f è continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

Studiamo quindi continuità e derivabilità in $x_0 = 0$:

□ continuità in $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \to 0} (a\cos^2(x) + b\sin(x))$$

$$= a \cdot \cos^2(0) + b\sin(0) = a \cdot 1^2 + b\,0 = a \cdot 1 + b \cdot 0 = a$$

$$f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \to 0} -\frac{2}{x+1} = -\frac{2}{1} = -2.$$

Allora, f continua in $x_0 = 0 \iff \boxed{a = -2}$

Sostituiamo ad a il -2:

$$f(x) = \begin{cases} -2\cos^2(x) + b\sin(x), & x < 0 \\ -\dfrac{2}{x+1}, & x \geq 0 \end{cases}$$

Calcoliamo le derivate:

- per $x < 0$

DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA:

$(\cos^2(x))' = [(\cos(x))^2]' = 2\cos(x) \cdot (\cos(x))'$

$= 2\cos(x) \cdot (-\sin(x))$

$$f'(x) = -2 \cdot 2\cos(x) \cdot (-\sin(x)) + b\cos(x)$$

$$= 4\cos(x)\sin(x) + b\cos(x)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \to 0} (4\cos(x)\sin(x) + b\cos(x))$$

$$= 4\cos(0)\sin(0) + b\cos(0) = 4 \cdot 1 \cdot 0 + b \cdot 1 = b$$

• per $x > 0$

$$f(x) = -\frac{2}{x+1} \longrightarrow f'(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$$ (derivata del reciproco)

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{2}{1} = 2.$$

Quindi,

f continua e derivabile in $x_0 = 0$ (e quindi in $\mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ $\boxed{a = -2, \ b = 2}$

Esercizio 2. (8 punti) Risolvere il seguente integrale

$$\int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{1}{2}} e^{3x+2}\, dx.$$

Soluzione: $\frac{1}{3}(\sqrt{e}-1)$

PRIMO MODO PER RISOLVERLO:

Per sostituzione: poniamo $t = 3x+2 \longrightarrow 3x = t-2 \longrightarrow \boxed{x = \frac{1}{3}t - \frac{2}{3}}$

$\longrightarrow \boxed{dx = \frac{1}{3}dt}$

Inoltre,

• $x = -\frac{2}{3} \longrightarrow t = \cancel{3}\cdot\left(-\frac{2}{\cancel{3}}\right)+2 = -2+2 = 0 \longrightarrow \boxed{t=0}$

• $x = -\frac{1}{2} \longrightarrow t = 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2 = -\frac{3}{2}+2 = \frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{t = \frac{1}{2}}$

Allora,

$$\int_{-2/3}^{-1/2} e^{3x+2}\,dx = \int_0^{1/2} \frac{1}{3} e^t\, dt = \frac{1}{3}\int_0^{1/2} e^t dt = \frac{1}{3}\left[e^t\right]_0^{1/2} = \frac{1}{3}\left(e^{1/2} - e^0\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^{1/2}-1\right) = \boxed{\frac{1}{3}\left(\sqrt{e}-1\right)}$$

N.B: il $+c$ nell'integrale definito non si usa. A maggior ragione non può comparire nel risultato!

SECONDO MODO PER RISOLVERLO:

$$\int_{-\frac{2}{3}}^{-1/2} e^{3x+2}\,dx = \int_{-\frac{2}{3}}^{-1/2} e^{3x}\cdot \underbrace{e^2}_{\text{costante}}\,dx = e^2\int_{-2/3}^{-1/2} e^{3x}\,dx$$

Poniamo $t = 3x \longrightarrow \boxed{x = \frac{1}{3}t} \longrightarrow \boxed{dx = \frac{1}{3}\,dt}$

- $x = -\frac{2}{3} \longrightarrow t = \cancel{3}\cdot\left(-\frac{2}{\cancel{3}}\right) = -2 \longrightarrow \boxed{t = -2}$
- $x = -\frac{1}{2} \longrightarrow t = 3\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} \longrightarrow \boxed{t = -\frac{3}{2}}$

Allora

$$\int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{1}{2}} e^{3x+2}\,dx = e^2\int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{1}{2}} e^{3x}\,dx = e^2\int_{-2}^{-3/2} e^{t}\cdot\frac{1}{3}\,dt$$

$$= e^2\cdot\frac{1}{3}\int_{-2}^{-3/2} e^t\,dt = \frac{e^2}{3}\left[e^t\right]_{-2}^{-3/2} = \frac{e^2}{3}\left[e^{-3/2} - e^{-2}\right]$$

$$= \frac{e^2}{3}\cdot e^{-3/2} - \frac{e^2}{3}e^{-2} = \frac{1}{3}\left(e^{2-\frac{3}{2}} - e^{2-2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(e^{1/2} - e^0\right) = \frac{1}{3}\left(e^{1/2} - 1\right) = \boxed{\frac{1}{3}\left(\sqrt{e} - 1\right)}$$

Esercizio 3. (10 punti) Data la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{x}$$

determinarne: dominio, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, eventuali asintoti ed eventuali massimi e minimi. Tracciarne infine un grafico qualitativo qui sotto.

① DOMINIO: $x \neq 0 \longrightarrow \boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

② SIMMETRIE: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 3x + 4}{-x} = -\dfrac{x^2 + 3x + 4}{x} \neq f(x), -f(x)$

$\longrightarrow$ f né pari, né dispari

③ INTERSEZIONI CON GLI ASSI:

- asse y: non ce ne possono essere, visto che $0 \notin D$

- asse x:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x} \end{cases} \longrightarrow \frac{x^2 - 3x + 4}{x} = 0 \longrightarrow \cancel{x} \cdot \frac{x^2 - 3x + 4}{\cancel{x}} = \underbrace{0 \cdot x}_{=0}$$

$\longrightarrow x^2 - 3x + 4 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 9 - 16 = -7 < 0$

$\longrightarrow x^2 - 3x + 4 = 0$ non ha soluzioni reali

$\longrightarrow$ non ci sono intersezioni con l'asse x.

④ SEGNO:

$$\frac{x^2 - 3x + 4}{x} > 0$$

Per il trinomio $ax^2 + bx + c$, con $a > 0$, se $\Delta < 0 \Longrightarrow ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

N: $x^2 - 3x + 4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ perché $\Delta < 0$

D: $x > 0$

		0	
N	+		+
D	−		+
	−		+

Dunque

$f(x) > 0$ se $x > 0$

$f(x) < 0$ se $x < 0$

⑤ ASINTOTI:

- verticali: $x=0$ candidato.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-3x+4}{x} = \frac{0-3\cdot 0+4}{0^+} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-3x+4}{x} = \frac{0-3\cdot 0+4}{0^-} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$\Rightarrow$ $x=0$ asintoto verticale per f.

- orizzontali:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3x+4}{x} = \frac{+\infty-\infty}{+\infty} \quad F.I.$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{\cancel{2}}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x\left(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{1} = +\infty(1-0+0)$$

$= +\infty$ $\Rightarrow$ non ci sono asintoti orizzontali per $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-3x+4}{x} = \frac{+\infty}{-\infty} \quad F.I.$$

$$= \lim_{x\to -\infty} \frac{x^{\cancel{2}}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x\left(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{1} = -\infty(1-0+0)$$

$= -\infty$ $\Rightarrow$ non ci sono asintoti orizzontali per $x\to-\infty$.

- obliqui:

• per $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3x+4}{x}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3x+4}{x^2} = \frac{+\infty-\infty}{+\infty} \quad F.I.$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}} = 1-0+0 = \boxed{1 =: m}$$

Ora calcoliamo

$$\lim_{x\to +\infty} [f(x)-mx] = \lim_{x\to +\infty} \left[\frac{x^2-3x+4}{x} - x\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{x^2}-3x+4-\cancel{x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{-3x+4}{x} = \frac{-\infty}{+\infty} \quad F.I.$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}(-3+\frac{4}{x})}{\cancel{x}} = -3+0 = \boxed{-3 =: q}$$

$\Rightarrow$ $y = x-3$ asintoto obliquo per $x\to+\infty$.

- per $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x+4}{x}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x+4}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ F.I.}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}(1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2})}{\cancel{x^2}} = 1-0+0 = \boxed{1 =: m}$$

Ora calcoliamo

$$\lim_{x\to-\infty} [f(x)-mx] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^2-3x+4}{x} - x\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}-3x+4-\cancel{x^2}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x+4}{x} = \frac{+\infty}{-\infty} \text{ F.I.}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}(-3+\frac{4}{x})}{\cancel{x}} = -3+0 = \boxed{-3 =: q}$$

$\Rightarrow$ $y = x-3$ asintoto obliquo per $x\to-\infty$.

⑥ MASSIMI E MINIMI: $f(x) = \frac{x^2-3x+4}{x}$

$$f'(x) = \frac{(2x-3)x - 1\cdot(x^2-3x+4)}{x^2} = \frac{2x^2\cancel{-3x}-x^2\cancel{+3x}-4}{x^2}$$

$$= \frac{x^2-4}{x^2}$$

Cerchiamo i punti critici:

$$f'(x)=0 \longrightarrow \frac{x^2-4}{x^2} = 0 \longrightarrow \cancel{x^2}\cdot\frac{x^2-4}{\cancel{x^2}} = \underbrace{0\cdot x^2}_{0}$$

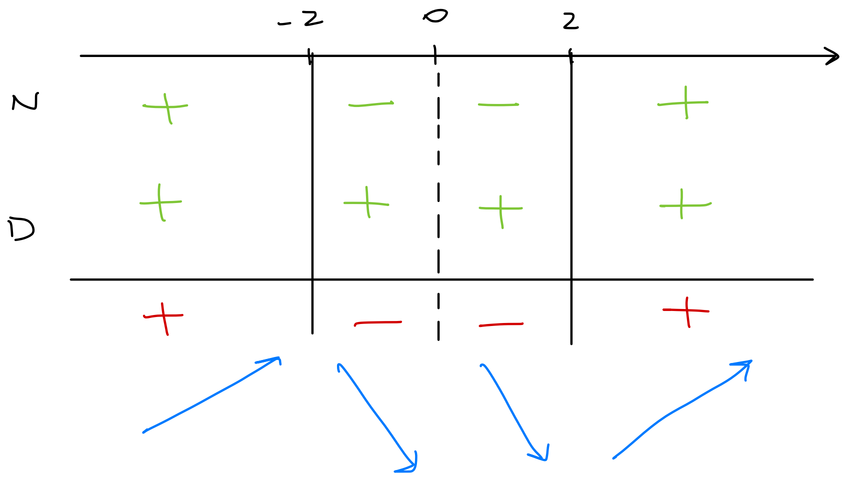
$$\longrightarrow x^2-4=0 \longrightarrow x^2=4 \longrightarrow \boxed{x=-2 \vee x=2}$$

Classifichiamoli:

$$f'(x)>0 \longrightarrow \frac{x^2-4}{x^2}>0$$

N: $x^2-4>0 \longrightarrow x^2>4 \longrightarrow x<-2 \vee x>2$

D: $x^2>0 \quad \forall x\in D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$



- in $x = -2$ f passa da crescente a decrescente
  $\Rightarrow$ $x = -2$ punto di massimo relativo
- in $x = 2$ f passa da decrescente a crescente
  $\Rightarrow$ $x = 2$ punto di minimo relativo.