Compito del 18/02/2025

Corso di MATEMATICA per il Corso di Laurea Triennale in SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI
Docente: Alessio Barbieri, **E-mail:** alessio.barbieri@unitus.it

Nome e Cognome: ....
Numero di Matricola: ....
Tempo: 3 ore. Non sono ammesse calcolatrici, appunti personali o libri.

Esercizio	D1	D2	E1	E2	E3	Σ
Voto						

Parte Teorica

Domanda 1. (3 punti) Indicare quale delle seguenti è la definizione di

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell,$$

per $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, \ell \in \mathbb{R}^*$ con $x_0 \in I'$.

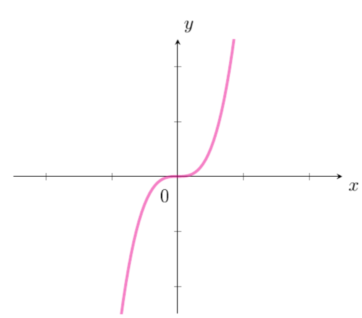
$\boxed{a}$ $\forall (a_n)_n \subseteq I$ tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ si ha $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$

$\boxed{b}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$

$\boxed{c}$ $\exists (a_n)_n \subseteq I \setminus \{x_0\}$ con $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ tale che $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$

$\boxed{d}$ $\forall (a_n)_n \subseteq I \setminus \{x_0\}$ tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ si ha $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$

Domanda 2. (3 punti) La funzione $f(x) = x^3$, il cui grafico è riportato qui sotto è un esempio di funzione che soddisfa una seguenti delle proprietà.
Quale?



$\boxed{a}$ Ha un salto in $x = 0$,

$\boxed{b}$ Presenta un punto angoloso in $x = 0$,

$\boxed{c}$ Ha un punto critico in $x = 0$ che non è né punto di massimo, né punto di minimo,

$\boxed{d}$ Non ha punti critici.

Parte Pratica

Esercizio 1. (6 punti) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \cos(x^2)$ nel punto di ascissa $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Soluzione:

Esercizio 2. (8 punti) Risolvere il seguente problema di Cauchy, indicando l'intervallo di definizione della soluzione

$$\begin{cases} y' - x\ln(x)y = 0 \\ y(1) = e^{-\frac{1}{4}}. \end{cases}$$

Soluzione:

Esercizio 3. (10 punti) Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2+1}$$

determinarne: dominio, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, eventuali asintoti ed eventuali massimi e minimi. Tracciarne infine un grafico qualitativo qui sotto.

SVOLGIMENTO:

Domanda 1. (3 punti) Indicare quale delle seguenti è la definizione di

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell,$$

per $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, \ell \in \mathbb{R}^*$ con $x_0 \in I'$.

$\boxed{a}$ $\forall (a_n)_n \subseteq I$ tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ si ha $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$

$\boxed{b}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$

$\boxed{c}$ $\exists (a_n)_n \subseteq I \setminus \{x_0\}$ con $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ tale che $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$

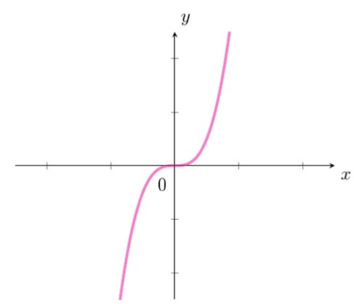
$\boxed{d}$ $\forall (a_n)_n \subseteq I \setminus \{x_0\}$ tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ si ha $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$

$\boxed{a}$ e $\boxed{c}$ non sono definizioni di nulla.

$\boxed{b}$ è la definizione di successione convergente a $\ell \in \mathbb{R}$.

$\boxed{d}$ è la risposta giusta.

Domanda 2. (3 punti) La funzione $f(x) = x^3$, il cui grafico è riportato qui sotto è un esempio di funzione che soddisfa una seguenti delle proprietà. Quale?



$\boxed{a}$ Ha un salto in $x = 0$,

$\boxed{b}$ Presenta un punto angoloso in $x = 0$,

$\boxed{c}$ Ha un punto critico in $x = 0$ che non è né punto di massimo, né punto di minimo,

$\boxed{d}$ Non ha punti critici.

La fuzione $f(x) = x^3$ è notoriamente un esempio di funzione con un punto critico che non è né punto di massimo, né di minimo. Infatti, f è continua e derivabile in $\mathbb{R}$, essendo un polinomio: questo esclude automaticamente $\boxed{a}$ e $\boxed{b}$.

Poi, $f'(x) = 3x^2$ e $f'(x) = 0 \longrightarrow x = 0$ punto critico

$\Rightarrow \boxed{d}$ è falsa.

La risposta giusta è $\boxed{c}$. Per ulteriori dettagli, ci riferiamo agli appunti del corso nella pagina relativa al "Teorema di Fermat".

Esercizio 1. (6 punti) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \cos(x^2)$ nel punto di ascissa $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Soluzione: $\boxed{y = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}}$

La retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = x_0$ ha equazione

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Per $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $f(x_0) = \cos\left(\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$f'(x) = \left(\cos(x^2)\right)' = -\sin(x^2) \cdot 2x$$

$$= -2x \sin(x^2)$$

Derivata della funzione composta!

$$\rightarrow f'\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = -\cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\cancel{2}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

Dunque, la retta tangente ha equazione

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$$

$$\rightarrow \boxed{y = -\frac{\sqrt{2\pi}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{4}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Esercizio 2. (8 punti) Risolvere il seguente problema di Cauchy, indicando l'intervallo di definizione della soluzione

$$\begin{cases} y' - x\ln(x)y = 0 \\ y(1) = e^{-1/4} \end{cases}$$

Soluzione: $\boxed{I = (0,+\infty),\quad y(x) = e^{\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}}.}$

METODO 1: l'equazione differenziale è del primo ordine lineare e omogenea, del tipo

$$y' + a(x)y = 0,$$

dove $a(x) = -x\ln(x)$. Il dominio di a è $\boxed{I = (0,+\infty)}$ e a è continua in I. Pertanto, visto che $x_0 = 1 \in I$, il problema assegnato ammette un'unica soluzione $y : I \to \mathbb{R}$.

Risolviamo l'equazione:

$$y' + a(x)y = 0 \longrightarrow y(x) = c\, e^{-\int a(x)\,dx}.$$

L'integrale si fa per parti:

$$f'(x) = x \longrightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$g(x) = \ln(x) \longrightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$$

$$-\int a(x)\,dx = \int \underbrace{x}_{f'}\,\underbrace{\ln(x)}_{g}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x}{2}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione è

$$y(x) = c\, e^{\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}}.$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(1) = e^{-1/4}$:

$$e^{-1/4} = c\, e^{\frac{1}{2}\underbrace{\ln(1)}_{=0} - \frac{1}{4}} = c\, e^{-1/4} \longrightarrow e^{-1/4} = c\, e^{-1/4} \longrightarrow \boxed{c = 1}$$

Allora la soluzione del problema assegnato è $y : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$\boxed{y(x) = e^{\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}}}$$

METODO 2: il problema si può anche rivedere come problema di Cauchy con equazione a variabili separabili riscrivendolo così:

$$\begin{cases} y' = x\ln(x) y \\ y(1) = e^{-1/4} \end{cases}.$$

Per l'equazione $y' = x\ln(x)\cdot y$,

- $f(x) = x\ln(x)$ continua in $I = (0,+\infty)$, $x_0 = 1 \in I$,
- $g(y) = y$ di classe C^1 in $\mathbb{R}$.

Allora il problema ammette un'unica soluzione locale

$$y : I' \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{con} \quad I' \subseteq I.$$

Determiniamola:

- $y=0$ NON è soluzione del problema perché $y(1) = 0 \neq e^{-1/4}$.
- Dividiamo per y:

$$y' = x\ln(x)\cdot y \longrightarrow \frac{y'}{y} = x\ln(x)$$

e integriamo:

si risolve come nel Metodo 1

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\ln(x)\,dx$$

$$\longrightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + c$$

$$\longrightarrow |y(x)| = e^{\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + c}.$$

Imponiamo $y(1) = e^{-1/4}$.

$$|e^{-1/4}| = e^{-1/4} = e^{-1/4+c} \longrightarrow e^{-1/4} = e^{-1/4+c} \longrightarrow -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + c$$

$$\longrightarrow \boxed{c=0}$$

$$\longrightarrow |y(x)| = e^{\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}} \longrightarrow y(x) = \pm e^{\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}}.$$

Dato che $y(1) = e^{-1/4} > 0$, scelgo il segno $+$. Quindi la soluzione del problema è

$$\boxed{y(x) = e^{\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4}}} \quad \text{che ha dominio } (0,+\infty) \Longrightarrow \boxed{I' = I = (0,+\infty)}.$$

Esercizio 3. (10 punti) Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2+1}$$

determinarne: dominio, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, eventuali asintoti ed eventuali massimi e minimi. Tracciarne infine un grafico qualitativo qui sotto.

① DOMINIO: $x^2+1 \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \boxed{D = \mathbb{R}}$

② SIMMETRIE:

$$f(-x) = \frac{e^{(-x)^2}}{(-x)^2+1} = \frac{e^{x^2}}{x^2+1} = f(x) \Rightarrow f \text{ pari}$$

③ INTERSEZIONI ASSI:

□ asse y: $\begin{cases} x=0 \\ y = \frac{e^{x^2}}{x^2+1} \end{cases} \rightarrow y = \frac{e^0}{0+1} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ (0,1) punto di intersezione

□ asse x: $\begin{cases} y=0 \\ y = \frac{e^{x^2}}{x^2+1} \end{cases} \rightarrow \frac{e^{x^2}}{x^2+1} = 0 \rightarrow e^{x^2} = 0 \quad \nexists x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ nessun punto di intersezione

④ SEGNO: $f(x) > 0 \rightarrow \frac{e^{x^2}}{x^2+1} > 0$

$$\left.\begin{array}{l} N: e^{x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ D. \ x^2+1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

⑤ ASINTOTI:

□ verticali: nessuno, perché $D = \mathbb{R}$

□ orizzontali.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2+1} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

Dato che $e^{x^2} \gg x^2+1$ per $x \to +\infty$, dalla gerarchia degli infiniti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2+1} = +\infty$$

Essendo f pari, $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2+1} = +\infty$

$\Rightarrow$ non ci sono asintoti orizzontali.

□ obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2+1}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x^3+x} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ F.I.}$$

Dato che $e^{x^2} >> x^3+x$ per $x\to+\infty$, dalla gerarchia degli infiniti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x^3+x} = +\infty$$

Per parità di f, $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

Dunque, non ci sono asintoti obliqui.

6) MASSIMI E MINIMI:

Calcoliamo $f'(x)$.

$$(e^{x^2})' = e^{x^2}\cdot(x^2)' = 2x\,e^{x^2}$$

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2+1} \longrightarrow f'(x) = \frac{2x\,e^{x^2}(x^2+1) - 2x\,e^{x^2}}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{2xe^{x^2}\cdot x^2 + \cancel{2xe^{x^2}} - \cancel{2xe^{x^2}}}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3\cdot e^{x^2}}{(x^2+1)^2}$$

Troviamo i punti critici:

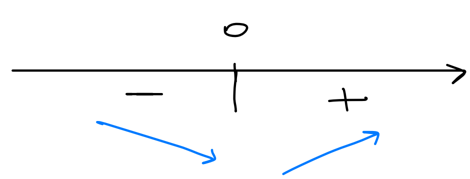
$$f'(x)=0 \longrightarrow \frac{2x^3\cdot e^{x^2}}{(x^2+1)^2} = 0 \longrightarrow 2x^3=0 \longrightarrow x^3=0 \longrightarrow \boxed{x=0}$$

Classifichiamolo.

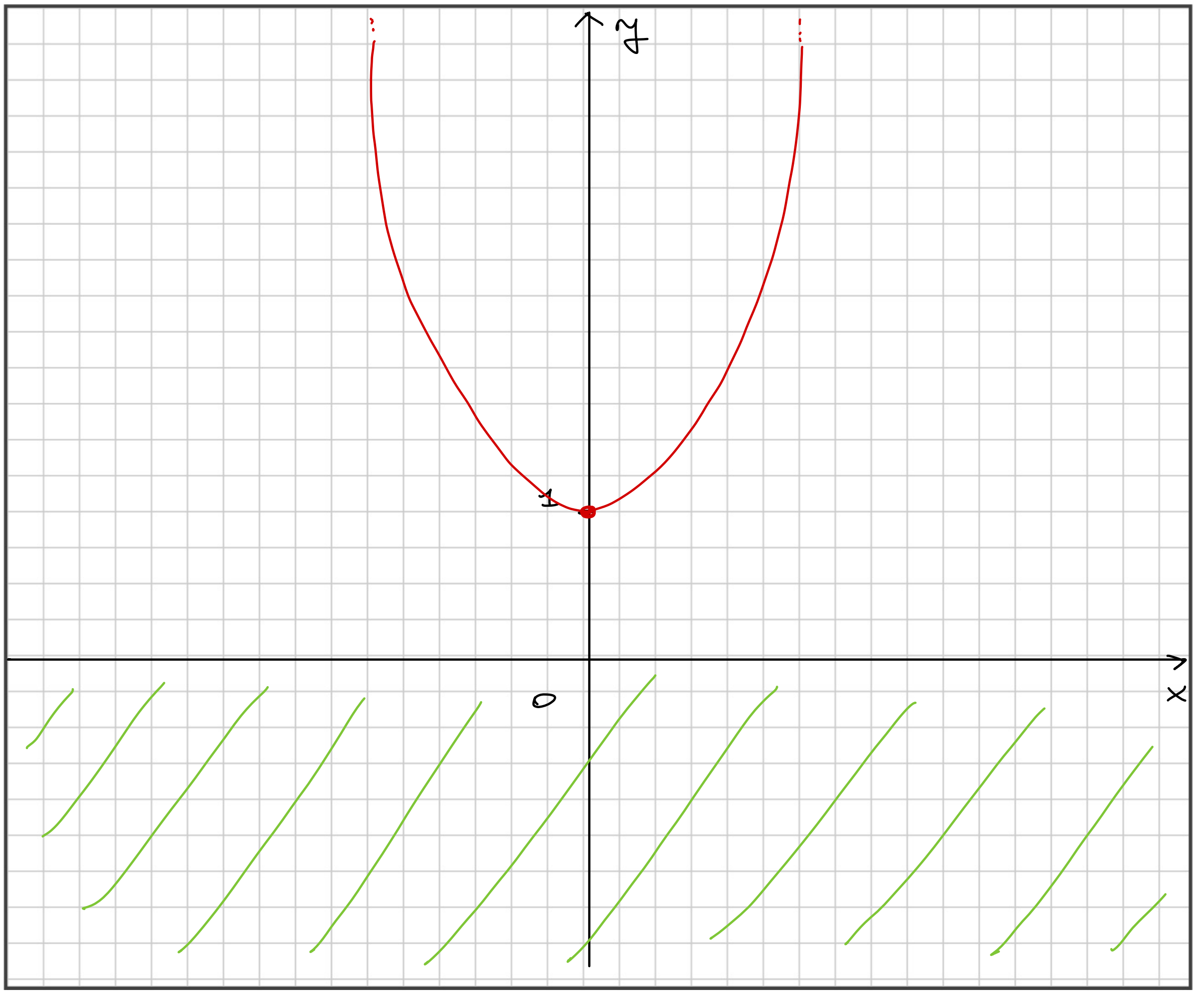
$$f'(x)>0 \longrightarrow \frac{2x^3\cdot e^{x^2}}{(x^2+1)^2} > 0$$

- $2x^3>0 \longrightarrow x^3>0 \longrightarrow x>0$
- $e^{x^2}>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$
- $(x^2+1)^2>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $f'(x)>0$ se $x>0$, $f'(x)<0$ se $x<0$



Allora, $x=0$ è punto di minimo relativo per f.



y
1
0
x