SVOLGIMENTO:

Domanda 1. (3 punti) Indicare quale delle seguenti è la definizione di successione $(a_n)_n$ convergente al numero $\ell \in \mathbb{R}$:

$\boxed{a}$ $\forall \varepsilon > 0 \, |a_n - \ell| < \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$,

$\boxed{b}$ $\exists \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}\colon |a_n - \ell| < \varepsilon$,

$\boxed{c}$ $\forall M > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}\colon a_n > \ell \ \forall n \geq M$,

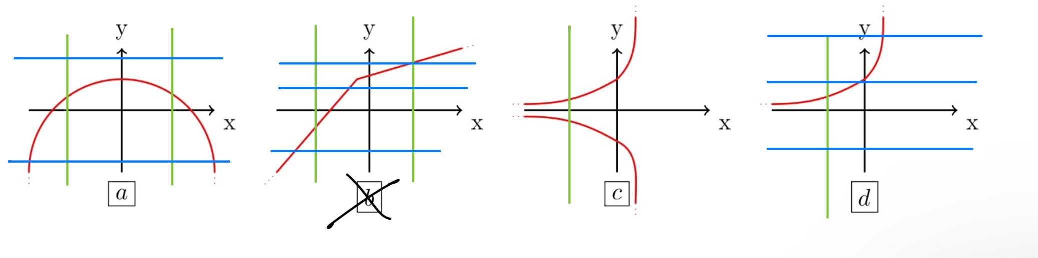
$\boxed{d}$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$.

La $\boxed{b}$ e la $\boxed{c}$ non sono definizioni esistenti $\longrightarrow$ $\boxed{b}$, $\boxed{c}$ ERRATE

La differenza tra $\boxed{a}$ e $\boxed{d}$ è che la proprietà $|a_n - \ell| < \varepsilon$ vale $\forall n \in \mathbb{N}$ in $\boxed{a}$ e per $n \geq n_0$ in $\boxed{d}$.

La risposta giusta è $\boxed{d}$, perché nella definizione di limite $|a_n - \ell| < \varepsilon$ deve valere DEFINITIVAMENTE, cioè per $n \geq n_0$.

Domanda 2. (3 punti) Soltanto uno fra questi è il grafico di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua in $\mathbb{R}$ e suriettiva. Quale?



Tracciando rette verticali, queste incontrano i grafici $\boxed{a}$, $\boxed{b}$, $\boxed{d}$ una sola volta, mentre incontrano 2 volte l'una il grafico di $\boxed{c}$.
Quindi $\boxed{c}$ non può essere il grafico di una funzione
$\longrightarrow$ $\boxed{c}$ ERRATA.

Dei tre grafici rimanenti, tutti sono tracciati senza staccare la penna dal foglio, quindi $\boxed{a}$, $\boxed{b}$, $\boxed{d}$ sono grafici di funzioni continue.
Per determinare quale tra $\boxed{a}$, $\boxed{b}$ e $\boxed{d}$ è suriettiva, tracciamo rette orizzontali:

$\boxed{a}$ vi sono rette orizzontali che non intersecano mai il grafico
$\longrightarrow$ $\boxed{a}$ non suriettiva $\longrightarrow$ $\boxed{a}$ ERRATA

$\boxed{d}$ le rette $y = k$ con $k \leq 0$ non incontrano mai il grafico
$\longrightarrow$ $\boxed{d}$ non suriettiva $\longrightarrow$ $\boxed{d}$ ERRATA $\longrightarrow$ la risposta giusta è $\boxed{b}$

Esercizio 1. (6 punti) Data la funzione $f(x) = e^{4x^2+x}$, determinare l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa $x_0 = 0$.

Soluzione: $\boxed{y = x+1}$

Ricordo che l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto di ascissa $x = x_0$ ha equazione

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)}$$

Allora:

$$f(x_0) = f(0) = e^{4\cdot 0+0} = e^0 = 1$$

$$f(x) = e^{4x^2+x} \longrightarrow f'(x) = e^{4x^2+x} \cdot (8x+1)$$

$$\longrightarrow f'(0) = e^0 \cdot (8 \cdot 0 + 1) = 1(0+1) = 1$$

Dunque l'equazione della retta cercata è

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 0) \longrightarrow y - 1 = x \longrightarrow \boxed{y = x+1}$$

Esercizio 2. (10 punti) Risolvere il seguente problema di Cauchy, indicando l'intervallo di definizione della soluzione

$$\begin{cases} y' = -e^x \cdot y^3 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione: $\boxed{y(x) = \frac{1}{\sqrt{2e^x - 1}} \quad \text{con } I' = (-\ln(2), +\infty)}$

Il problema considerato è un problema di Cauchy associato a un'equazione a variabili separabili

$$y' = f(x) \cdot g(y),$$

con $f(x) = -e^x \longrightarrow f$ continua in $I = \mathbb{R}$

$g(y) = y^3 \longrightarrow g$ di classe C^1 in $J = \mathbb{R}$.

Allora il problema assegnato ammette un'unica soluzione locale $y : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ con $I' \subseteq I = \mathbb{R}$.

Studiamo l'equazione $g(y) = 0$:

$g(y) = 0 \longrightarrow y^3 = 0 \longrightarrow y = 0$ è soluzione del problema?

No, perché non soddisfa la condizione iniziale: $y(0) = 0 \neq 1$.

Dividiamo per $g(y)=y^3$:

$$\frac{y'}{y^3} = -e^x$$

Integriamo:

$$\int \frac{dy}{y^3} = -\int e^x\,dx \longrightarrow \int y^{-3}\,dy = -\int e^x\,dx$$

$$\longrightarrow \frac{y^{-3+1}}{-3+1} = -e^x + c \longrightarrow \frac{y^{-2}}{-2} = -e^x + c$$

$$\longrightarrow y^{-2} = 2e^x + c \longrightarrow \frac{1}{y^2} = 2e^x + c$$

Prima di proseguire determiniamo c imponendo la condizione iniziale $y(0)=1$:

$$\frac{1}{1^2} = 2e^0 + c \longrightarrow 1 = 2 + c \longrightarrow \boxed{c = -1}$$

Allora,

$$\frac{1}{y^2} = 2e^x - 1 \longrightarrow y^2 = \frac{1}{2e^x-1} \longrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{2e^x-1}}$$

$$\longrightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{2e^x-1}}$$

Dato che $y(0)=1>0$, scelgo il $+$: la soluzione del problema assegnato è

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{\sqrt{2e^x-1}}}$$

Determiniamo l'intervallo I': studiamo il dominio di $y(x)$.

$$\begin{cases} 2e^x-1 \geq 0 & \text{(radice)} \\ \sqrt{2e^x-1} \neq 0 & \text{(denominatore)} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2e^x-1 \geq 0 \\ 2e^x-1 \neq 0 \end{cases} \longrightarrow 2e^x-1>0$$

$$\longrightarrow 2e^x > 1 \longrightarrow e^x > \frac{1}{2} \longrightarrow \overbrace{\ln(e^x)}^{x\,=} > \ln\left(\frac{1}{2}\right) \longrightarrow x > \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\longrightarrow x > \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2^{-1}) = -\ln(2)$$

Allora $\boxed{I' = (-\ln(2), +\infty)}$

Esercizio 3. (10 punti) Data la funzione

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

determinarne: dominio, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, eventuali asintoti ed eventuali massimi e minimi. Tracciarne infine un grafico qualitativo qui sotto.

① DOMINIO: $x^2+1>0 \longrightarrow x^2>-1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow \boxed{D=\mathbb{R}}$

② SIMMETRIE: $f(-x) = \ln((-x)^2+1) = \ln(x^2+1) = f(x) \longrightarrow f$ pari

③ INTERSEZIONI ASSI:

- asse y: $\begin{cases} x=0 \\ y=\ln(x^2+1) \end{cases} \longrightarrow y=\ln(1)=0 \longrightarrow (0,0)$ punto di intersezione con asse y

- asse x: $\begin{cases} y=0 \\ y=\ln(x^2+1) \end{cases} \longrightarrow \ln(x^2+1)=0 \longrightarrow x^2\cancel{+1}=\cancel{1} \longrightarrow x^2=0$
$\longrightarrow x=0 \longrightarrow (0,0)$ punto di intersezione con asse x

④ SEGNO: $f(x)>0 \longrightarrow \ln(x^2+1)>0 \longrightarrow x^2\cancel{+1}>\cancel{1} \longrightarrow x^2>0$
$\forall x \neq 0$

⑤ ASINTOTI:

- verticali: nessuno
- orizzontali:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to+\infty} \ln(x^2+1) = \ln(+\infty) = +\infty \\ \text{Per parità, } \lim_{x\to-\infty} \ln(x^2+1) = +\infty \end{array}\right\} \text{non ci sono asintoti orizzontali}$$

- obliqui:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = 0 \quad \text{per gerarchia degli infiniti}$$

$\longrightarrow m=0 \longrightarrow$ non ci sono asintoti obliqui per $x\to+\infty$

Per parità, non ci sono asintoti obliqui per $x\to-\infty$ neanche.

⑥ MASSIMI E MINIMI:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

Punti critici: $f'(x)=0 \longrightarrow \frac{2x}{x^2+1} = 0 \longrightarrow 2x = 0 \longrightarrow x=0$

Lo classifico.

$f'(x) > 0 \longrightarrow 2x > 0 \longrightarrow x > 0$

$\longrightarrow$ $x_0 = 0$ punto di minimo locale.