SVOLGIMENTO:

Domanda 1. (3 punti) Indicare quale delle seguenti è la definizione di successione $(a_n)_n$ divergente a $-\infty$:

$\boxed{a}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$,

$\boxed{b}$ $\forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ a_n < -M\ \forall n \geq n_0$,

$\boxed{c}$ $\forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < M\ \forall n \geq n_0$,

$\boxed{d}$ $\forall M > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ a_n > M\ \forall n \geq n_0$.

$\boxed{a}$ è la definizione di successione convergente $\longrightarrow$ $\boxed{a}$ FALSA

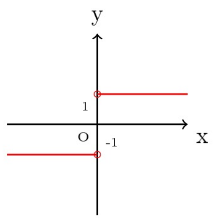
$\boxed{d}$ è la definizione di successione divergente a $+\infty$ $\longrightarrow$ $\boxed{d}$ FALSA

$\boxed{c}$ è un altro modo per scrivere $\boxed{a}$ $\longrightarrow$ $\boxed{c}$ FALSA

La risposta giusta è $\boxed{b}$.

Domanda 2. (3 punti) La "funzione segno" $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, di cui sotto sono riportate legge di definizione e grafico,

$$f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$



è un esempio di funzione che soddifa una delle seguenti proprietà. Quale?

$\boxed{a}$ E' una funzione continua ma non derivabile in $x_0 = 0$,
$\boxed{b}$ E' una funzione continua e derivabile in $x_0 = 0$,
$\boxed{c}$ E' una funzione non continua in $x_0 = 0$,
$\boxed{d}$ E' una funzione derivabile ma non continua in $x_0 = 0$.

Il grafico di f si interrompe in $x_0 = 0$, quindi lì ha una discontinuità.
La risposta giusta è quindi $\boxed{c}$.

Esercizio 1. (8 punti) Determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ affinché la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + a, & \text{se } x \geq 0, \\ b \cdot e^{x^2+x}, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $\mathbb{R}$.

Soluzione: $\boxed{a = 2\ , b = 2}$

La funzione f è sicuramente continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ perché le due leggi di definizione sono continue e derivabili ove definite.

- Studiamo la continuità in $x_0 = 0$:

$$f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 + a = a = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} b \cdot e^{x^2+x} = b e^0 = b$$

Quindi f è continua in $x_0 = 0 \iff \boxed{a = b}$

- Studiamo la derivabilità in $x_0 = 0$:

□ per $x > 0$: $f'(x) = 2x + 2 \longrightarrow \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 2$

□ per $x < 0$: $f'(x) = b \cdot e^{x^2+x} \cdot (2x+1)$

$$\longrightarrow \lim_{x \to 0^-} f'(x) = b \cdot e^0 \quad 1 = b$$

Quindi f è derivabile in $x_0 = 0 \iff \boxed{b = 2}$

Allora f è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ per $\boxed{a = b = 2.}$

Esercizio 2. (8 punti) Risolvere il seguente integrale

$$\int_{-1}^{0} 2x \cdot \arctan(x)\, dx.$$

Soluzione: $\frac{\pi}{2} - 1$

Integriamo per parti:

$f(x) = \text{arctg}(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x^2+1}$

$g'(x) = 2x \longrightarrow g(x) = x^2$

$$\int_{-1}^{0} \underbrace{2x}_{g'} \cdot \underbrace{\text{arctg}(x)}_{f} dx = \left[x^2 \cdot \text{arctg}(x)\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= 0 \cdot \text{arctg}(0) - (-1)^2 \overbrace{\text{arctg}(-1)}^{= -\pi/4} - \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{x^2+1} dx$$

$$= 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) - \int_{-1}^{0} \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_{-1}^{0} \left(\cancel{\frac{x^2+1}{x^2+1}} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_{-1}^{0} \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - \int_{-1}^{0} dx + \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{\pi}{4} - [x]_{-1}^{0} + \left[\text{arctg}(x)\right]_{-1}^{0}$$

$$= \frac{\pi}{4} - 0 + (-1) + \text{arctg}(0) - \text{arctg}(-1)$$

$$= \frac{\pi}{4} - 1 + 0 - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2} - 1}$$

Esercizio 3. (10 punti) Risolvere il seguente problema di Cauchy, specificando l'intervallo di definizione della soluzione

$$\begin{cases} y'' + 3y' - 4y = e^{2x} \\ y(0) = \frac{1}{6} \\ y'(0) = -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Soluzione: $\boxed{y(x) = -\frac{1}{3}e^{x} + \frac{1}{3}e^{-4x} + \frac{1}{6}e^{2x}, \quad I = \mathbb{R}}$

Il problema di Cauchy assegnato è associato a un'equazione di 2° ordine a coefficienti costanti non omogenea con $f(x) = e^{2x}$.

Essendo f continua in $I = \mathbb{R}$, il problema ammette un'unica soluzione definita in $\mathbb{R}$.

Consideriamo l'equazione omogenea associata:

$$y'' + 3y' - 4y = 0$$

che ha equazione caratteristica $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$.

$$\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -4 \end{cases}$$

L'integrale generale dell'omogenea è

$$\boxed{y_0(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-4x}}$$

Cerchiamo la soluzione particolare: essendo $f(x) = p(x)e^{\lambda x}$ con

- $p(x) = 1$ (grado 0)
- $\lambda = 2 \neq 1, -4$

allora $y_p(x) = A e^{2x}$.

Quindi,

$$y_p'(x) = 2Ae^{2x}, \quad y_p''(x) = 4Ae^{2x}.$$

Sostituendo nell'equazione,

$$y_p'' + 3y_p' - 4y_p = e^{2x} \longrightarrow \cancel{4Ae^{2x}} + 6Ae^{2x} - \cancel{4Ae^{2x}} = e^{2x}$$

$$\longrightarrow 6Ae^{2x} = e^{2x} \longrightarrow (6A - 1)e^{2x} = 0 \longrightarrow 6A - 1 = 0$$

$$\longrightarrow A = \frac{1}{6} \longrightarrow \boxed{y_p(x) = \frac{1}{6}e^{2x}}$$

L'integrale generale dell'equazione è

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-4x} + \frac{1}{6} e^{2x}.$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

- $y(0) = \frac{1}{6} \longrightarrow \frac{1}{6} = c_1 e^0 + c_2 e^0 + \frac{1}{6} e^0 \longrightarrow c_1 + c_2 + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

  $\longrightarrow \boxed{c_1 + c_2 = 0}$

Calcoliamo

$$y'(x) = c_1 e^{x} - 4c_2 e^{-4x} + \frac{1}{3} e^{2x}$$

- $y'(0) = -\frac{4}{3} \longrightarrow -\frac{4}{3} = c_1 - 4c_2 + \frac{1}{3} \longrightarrow c_1 - 4c_2 = -\frac{4}{3} - \frac{1}{3}$

  $\longrightarrow \boxed{c_1 - 4c_2 = -\frac{5}{3}}$

Determiniamo c_1 e c_2:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - 4c_2 = -\frac{5}{3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_1 + 4c_1 = -\frac{5}{3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ 5c_1 = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} c_2 = \frac{1}{3} \\ c_1 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

In conclusione, l'unica soluzione del problema è $y: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{3} e^{x} + \frac{1}{3} e^{-4x} + \frac{1}{6} e^{2x}}$$