SVOLGIMENTO:

Domanda 1. (3 punti) Indicare quale delle seguenti è la definizione di

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell,$$

per $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0, \ell \in \mathbb{R}^*$ con $x_0 \in I'$.

$\boxed{a}$ $\exists (a_n)_n \subseteq I \setminus \{x_0\}$ con $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ tale che $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$

$\boxed{b}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$

$\boxed{c}$ $\forall (a_n)_n \subseteq I \setminus \{x_0\}$ tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ si ha $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$

$\boxed{d}$ $\forall (a_n)_n \subseteq I$ tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = \ell$ si ha $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$

La $\boxed{a}$ non è definizione di niente $\longrightarrow$ $\boxed{a}$ ERRATA

La $\boxed{b}$ è la definizione di successione convergente: si noti che non appaiono né f, né x_0, quindi non può essere giusta $\longrightarrow$ $\boxed{b}$ ERRATA

La $\boxed{d}$ assomiglia (ma non è) alla continuità $\longrightarrow$ $\boxed{d}$ ERRATA.

Ne consegue che la risposta giusta è $\boxed{c}$.

Domanda 2. (3 punti) Il seguente problema

$$\begin{cases} y' = 2y^{\frac{2}{3}} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

è un esempio di problema di Cauchy che soddisfa una sola delle seguenti proprietà. Quale?

$\boxed{a}$ Ammette infinite soluzioni,
$\boxed{b}$ Ammette un'unica soluzione locale che non è globale,
$\boxed{c}$ Non ammette soluzioni,
$\boxed{d}$ Ammette un'unica soluzione globale.

Il problema considerato è un problema di Cauchy associato ad un'equazione differenziale a variabili separabili, cioè del tipo

$$y' = f(x) \cdot g(y),$$

con

- $f(x) = 2 \longrightarrow f$ continua in $I = \mathbb{R}$
- $g(y) = y^{2/3} \longrightarrow g$ è continua in $J = \mathbb{R}$ ma non derivabile in $y_0 = 0$, quindi non è di classe C^1 in J.

In generale, se $g \in C^1(J) \longrightarrow$ esistenza e unicità locale della sol.
In questo esempio, abbiamo mostrato che esistono infinite soluzioni del problema (pennello di Peano) $\longrightarrow$ la risposta giusta è $\boxed{a}$.

Esercizio 1. (8 punti) Determinare i valori di $a, b \in \mathbb{R}$ affinché la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & \text{se } x \leq 1, \\ \dfrac{\ln(x)}{x}, & \text{se } x > 1, \end{cases}$$

sia continua e derivabile in $\mathbb{R}$.

Soluzione: $\boxed{a = -1, b = 0}$

La funzione considerata è continua e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, perché le due leggi di definizione sono continue e derivabili ove definite.

- Studiamo la continuità in $x_0 = 1$:

$$f(1) = 1^2 + a \cdot 1 + b = 1 + a + b = \lim_{x \to 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\ln(1)}{1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Allora,

f continua in $x_0 = 1 \iff \boxed{a + b + 1 = 0}$

- Studiamo la derivabilità in $x_0 = 1$: calcoliamo $f'(x)$.

□ Se $x < 1$ $f(x) = x^2 + ax + b \longrightarrow f'(x) = 2x + a$

□ Se $x > 1$ $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x} \longrightarrow f'(x) = \dfrac{\cancel{\frac{1}{x}} \cdot \cancel{x} - 1 \cdot \ln(x)}{x^2} = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$

ovvero,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a, & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f'(x) = \lim_{x \to 1} (2x + a) = 2 + a$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f'(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(1)}{1} = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

Allora, f è derivabile in $x_0 = 1 \iff \boxed{2 + a = 1}$

Determiniamo a, b:

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ 2 + a = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ a = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} -1 + b + 1 = 0 \\ a = -1 \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{cases} b = 0 \\ a = -1 \end{cases}}$$

Esercizio 2. (8 punti) Risolvere il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx.$$

Soluzione: $\frac{\pi}{4}$

Poniamo $\boxed{t = \cos(x)} \longrightarrow dt = (\cos(x))'\,dx \longrightarrow dt = -\sin(x)\,dx$

$\longrightarrow \boxed{\sin(x)\,dx = -dt}$

Inoltre,

- $x=0 \longrightarrow t = \cos(0) = 1$
- $x = \frac{\pi}{2} \longrightarrow t = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

Quindi,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\overbrace{\sin(x)\,dx}^{-dt}}{1+\cos^2(x)} = \int_1^0 \frac{1}{1+t^2}(-1)\,dt = -\int_1^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= -\left[\operatorname{arctg}(t)\right]_1^0 = -[\underbrace{\operatorname{arctg}(0)}_{0} - \underbrace{\operatorname{arctg}(1)}_{\pi/4}] = -\left[0 - \frac{\pi}{4}\right] = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

Esercizio 3. (10 punti) Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2-4}$$

determinarne: dominio, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, eventuali asintoti ed eventuali massimi e minimi. Tracciarne infine un grafico qualitativo qui sotto.

① DOMINIO: $x^2 - 4 \neq 0 \longrightarrow x^2 \neq 4 \longrightarrow x \neq \pm 2 \longrightarrow \boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}}$

② SIMMETRIE: $f(-x) = \frac{e^{-x}}{(-x)^2 - 4} = \frac{e^{-x}}{x^2-4} \neq f(x), -f(x)$

$\longrightarrow f$ né pari, né dispari

③ INTERSEZIONE ASSI:

I) asse y: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{e^x}{x^2-4} \end{cases} \longrightarrow y = \frac{e^0}{0-4} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$

$\longrightarrow$ il punto di intersezione del grafico di f con l'asse y è $(0, -\frac{1}{4})$.

∘ asse x: $\begin{cases} y=0 \\ y=\dfrac{e^x}{x^2-4} \end{cases} \longrightarrow \cancel{(x^2-4)}\,\dfrac{e^x}{\cancel{x^2-4}} = \underbrace{0\cdot(x^2-4)}_{0} \longrightarrow e^x=0$

$\nexists x\in\mathbb{R}$

$\longrightarrow$ non ci sono intersezione con l'asse x

④ SEGNO: risolviamo la disequazione $f(x)>0$:

$$\frac{e^x}{x^2-4}>0$$

N: $e^x>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

D: $x^2-4>0 \longrightarrow x^2>4 \longrightarrow x<-2 \vee x>2$

Quindi:

- $f(x)>0$ per $x<-2 \vee x>2$,
- $f(x)<0$ per $-2<x<2$.

	$x<-2$	$-2<x<2$	$x>2$
N	+	+	+
D	+	−	+
	+	−	+

⑤ ASINTOTI:

∘ verticali: $x=-2$ e $x=2$ candidati asintoti verticali.

Teniamo a mente che il denominatore x^2-4 è

$\rightarrow$ positivo per $x<-2 \vee x>2$

$\rightarrow$ negativo per $-2<x<2$.

Calcoliamo:

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{e^x}{\underbrace{x^2-4}_{\text{positivo se } x\to-2^-}} = \frac{\overset{>0}{e^{-2}}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+}\frac{e^x}{\underbrace{x^2-4}_{\text{negativo se } x\to-2^+}} = \frac{e^{-2}}{0^-} = -\infty$$

$\Big\}$ $x=-2$ asintoto verticale

$$\lim_{x\to2^-}\frac{e^x}{x^2-4} = \frac{e^2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to2^+}\frac{e^x}{x^2-4} = \frac{e^2}{0^+} = +\infty$$

$\Big\}$ $x=2$ asintoto verticale

□ asintoti orizzontali:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2-4} = \frac{e^{+\infty}}{+\infty} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad F.I.$$

Dalla gerarchia degli infiniti $e^x \gg x^2-4$ per $x\to+\infty$, quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2-4} = +\infty \longrightarrow \text{non ci sono asintoti orizzontali per } x\to+\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2-4} = \frac{e^{-\infty}}{+\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0 \longrightarrow y=0 \text{ asintoto orizzontale per } x\to-\infty$$

□ asintoti obliqui (solo a $+\infty$):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} f(x)\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2-4}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x(x^2-4)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3-4x} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad F.I.$$

Tuttavia, $e^x \gg x^3-4x$ per $x\to+\infty$, quindi dalla gerarchia degli infiniti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3-4x} = +\infty \longrightarrow \text{non ci sono asintoti obliqui.}$$

⑥ MASSIMI E MINIMI: calcoliamo $f'(x)$.

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2-4} \longrightarrow f'(x) = \frac{e^x\cdot(x^2-4)-2x\cdot e^x}{(x^2-4)^2} = \frac{e^x(x^2-2x-4)}{(x^2-4)^2}$$

Punti critici:

$$f'(x)=0 \longrightarrow \cancel{(x^2-4)^2}\cdot\frac{e^x(x^2-2x-4)}{\cancel{(x^2-4)^2}} = \underbrace{0\cdot(x^2-4)^2}_{0}$$

$$\longrightarrow \underset{\neq 0}{e^x}(x^2-2x-4)=0 \longrightarrow x^2-2x-4=0$$

$$\Delta = (-2)^2-4\cdot1\cdot(-4) = 4+16=20$$

$$\longrightarrow x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{2\pm2\sqrt5}{2} = 1\pm\sqrt5 \quad \begin{cases} x_1 = 1+\sqrt5 \approx 3{,}2 \\ x_2 = 1-\sqrt5 \approx -1{,}2 \end{cases}$$

$$\sqrt{20} = \sqrt{2^2\cdot5} = 2\sqrt5$$

I punti critici di f sono $x = 1+\sqrt5$ e $x=1-\sqrt5$.

Classifichiamo i punti critici: studiamo $f'(x) > 0$.

$$f'(x) > 0 \longrightarrow \frac{e^x (x^2 - 2x - 4)}{(x^2-4)^2} > 0$$

- $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $(x^2-4)^2 > 0 \quad \forall x \in D$
- $x^2 - 2x - 4 > 0 \longrightarrow x < 1-\sqrt{5} \ \vee \ x > 1+\sqrt{5}$

		$1-\sqrt{5}$		$1+\sqrt{5}$	
e^x	+		+		+
$(x^2-4)^2$	+		+		+
x^2-4x-4	+		−		+
	+		−		+

Allora:

- $x_0 = 1-\sqrt{5}$ punto di massimo relativo per f,
- $x_0 = 1+\sqrt{5}$ punto di minimo relativo per f.