7. Equazioni differenziali

Esercizio 1. Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali lineari del primo ordine.

$$y' + 3y = 1 \qquad y' + 2xy = 2x \qquad y' - y = 2x$$

$$y' + y = e^{-x} \qquad y' + 3x^2 y = x^2 \qquad y' + \frac{y}{x+1} = 0.$$

Esercizio 2. Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili.

$$y' = x(1+y^2) \qquad y' = (3x^2-1)y^2 \qquad y' = xy^4$$

Esercizio 3. Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti.

$$4y'' - 4y' + y = 0 \qquad 3y'' + 5y' - 12y = 0 \qquad y'' + 3y' + 3y = 0$$

$$4y'' - 9y' + 5y = e^x \qquad y'' + y = \cos(2x) \qquad y'' + y' = x + 1$$

Esercizio 4. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy, specificando l'intervallo di definizione della soluzione.

$$\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} = x \\ y(1) = \frac{1}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \dfrac{2x-1}{y} \\ y(1) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' - 2xy = e^{x^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} y' = \dfrac{e^{-x}}{y^3} \\ y(0) = \sqrt{\frac{1}{e-1}} \end{cases}} \qquad \begin{cases} y'' - y = x^2 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3y'' + 5y' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Esercizio 1

1) $y' + 3y = 1$ $\qquad a(x) = 3,\ b(x) = 1$

$$\to y(x) = e^{-\int 3\,dx}\left[c + \int 1 \cdot e^{\int 3\,dx}\,dx\right] = e^{-3x}\left[c + \int e^{3x}\,dx\right]$$

$$= e^{-3x}\left[c + \frac{1}{3}\int e^{t}\,dt\right] = e^{-3x}\left[c + \frac{1}{3}e^{t}\right]$$

$t = 3x \to dx = \frac{1}{3}dt$

$$= e^{-3x}\left[c + \frac{1}{3}e^{3x}\right] = \boxed{c\,e^{-3x} + \frac{1}{3}}$$

2) $y' + 2xy = 2x$ $\qquad a(x) = b(x) = 2x$

$$\to y(x) = e^{-\int 2x\,dx}\left[c + \int 2x\, e^{\int 2x\,dx}\,dx\right]$$

$$= e^{-x^2}\left[c + \underbrace{\int 2x\, e^{x^2}\,dx}_{\text{Esercizio 3 n°7 integrali}}\right] = e^{-x^2}\left[c + e^{x^2}\right]$$

$$= \boxed{c\,e^{-x^2} + 1}$$

3) $y' - y = 2x$ $\qquad a(x) = -1,\ b(x) = 2x$

$$\to y(x) = e^{-\int (-1)\,dx}\left[c + \int 2x\, e^{\int(-1)\,dx}\,dx\right]$$

$$= e^{x}\left[c + \int 2x\, e^{-x}\,dx\right]$$

$$= e^{x}\left[c + 2\int \underbrace{x}_{f}\,\underbrace{e^{-x}}_{g'}\,dx\right]$$

$f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1$

$g'(x) = e^{-x} \longrightarrow g(x) = -e^{-x}$

$t = -x$

$\int e^{-x}dx = -\int e^{t}dt$
$= -e^{t}$
$= -e^{-x}$

$$= e^{x}\left[c + 2\left(-x e^{-x} - \int -e^{-x}\,dx\right)\right]$$

$$= e^{x}\left[c - 2x e^{-x} + 2\int e^{-x}\,dx\right]$$

$$= e^{x}\left[c - 2x e^{-x} - 2e^{-x}\right]$$

$$= \boxed{c\,e^{x} - 2x - 2}$$

4) $y' + y = e^{-x}$ $\qquad a(x) = 1, \quad b(x) = e^{-x}$

$$\rightarrow y(x) = e^{-\int dx}\left[c + \int e^{-x} e^{\int dx} dx\right] = e^{-x}\left[c + \int e^{-x} \cdot e^{x} dx\right]$$

$$= e^{-x}\left[c + \int dx\right] = \boxed{e^{-x}\left[c + x\right]}$$

5) $y' + 3x^2 y = x^2$ $\qquad a(x) = 3x^2, \quad b(x) = x^2$

$$\rightarrow y(x) = e^{-3\int x^2 dx}\left[c + \int x^2 e^{\int 3x^2 dx} dx\right]$$

$$= e^{-x^3}\left[c + \int x^2 e^{x^3} dx\right]$$

Risolviamo

$$\int x^2 e^{x^3} dx \underset{t = x^3}{=} \int \cancel{\sqrt[3]{t^2}}\, e^t \cdot \frac{1}{3\cancel{\sqrt[3]{t^2}}} dt = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3} e^t = \frac{1}{3} e^{x^3}$$

$t = x^3$

$x = \sqrt[3]{t} \rightarrow dx = \frac{1}{3} t^{-2/3} dt$

$= \frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} dt$

Quindi,

$$y(x) = e^{-x^3}\left[c + \frac{1}{3} e^{x^3}\right] = \boxed{c e^{-x^3} + \frac{1}{3}}$$

6) $y' + \frac{y}{x+1} = 0$ $\qquad a(x) = \frac{1}{x+1}, \quad b(x) = 0$

$$\rightarrow y(x) = c\, e^{-\int \frac{1}{x+1} dx} \underset{\substack{t = x+1 \\ dx = dt}}{=} c\, e^{-\int \frac{1}{t} dt} = c\, e^{-\ln|t|} = c\, e^{-\ln|x+1|}$$

$$= c\, e^{\ln\left(\frac{1}{|x+1|}\right)}$$

$-\ln(a)$
$= \ln(a^{-1})$
$= \ln\left(\frac{1}{a}\right)$

$$= \boxed{c \cdot \frac{1}{|x+1|}}$$

$e^{\ln(y)} = y$

Esercizio 2

1) $y' = x(1+y^2)$ $\qquad f(x)=x, \quad g(y)=1+y^2$

- $g(y)=0 \longrightarrow 1+y^2=0 \longrightarrow y^2=-1 \quad \nexists\, y \in \mathbb{R}$

Divido per $g(y)$:

$$\frac{y'}{1+y^2} = x \longrightarrow \int \frac{dy}{1+y^2} = \int x\,dx \longrightarrow \operatorname{arctg}(y) = \frac{x^2}{2}+c$$

$$\longrightarrow \boxed{y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{x^2}{2}+c\right)}$$

2) $y' = (3x^2-1)y^2$ $\qquad f(x) = 3x^2-1, \quad g(y)=y^2$

- $g(y)=0 \longrightarrow y^2=0 \longrightarrow y=0$

$$0 = (3x^2-1)\cdot 0 \longrightarrow 0=0 \longrightarrow \boxed{y=0 \text{ è soluzione}}$$

- $g(y)\neq 0$,

$$\frac{y'}{y^2} = 3x^2-1 \longrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int (3x^2-1)\,dx$$

$$\longrightarrow \int y^{-2}\,dy = 3\int x^2\,dx - \int dx$$

$$\longrightarrow \frac{y^{-1}}{-1} = 3\,\frac{x^3}{3} - x + c \longrightarrow -\frac{1}{y} = x^3-x+c$$

$$\longrightarrow \frac{1}{y} = -x^3+x+c \longrightarrow y(x) = \frac{1}{-x^3+x+c}$$

L'integrale generale è dato da

$$\boxed{y(x)=0 \quad \vee \quad y(x)=\frac{1}{-x^3+x+c}}$$

3) $y' = x y^4 \qquad f(x) = x, \quad g(y) = y^4$

□ $g(y) = 0 \longrightarrow y^4 = 0 \longrightarrow y = 0$

$0 = x \cdot 0 = 0 \longrightarrow y = 0$ è soluzione

□ $g(y) \neq 0 \longrightarrow \dfrac{y'}{y^4} = x \longrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y^4} = \int x\,dx$

$\longrightarrow \displaystyle\int y^{-4}\,dy = \frac{x^2}{2} + c \longrightarrow \frac{y^{-3}}{-3} = \frac{x^2}{2} + c$

$\longrightarrow -\dfrac{1}{y^3} = \dfrac{3}{2}x^2 + c \longrightarrow \dfrac{1}{y^3} = -\dfrac{3}{2}x^2 + c$

$\longrightarrow y^3 = \dfrac{1}{-\frac{3}{2}x^2 + c} \longrightarrow y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{-\frac{3}{2}x^2 + c}}$

L'integrale generale è dato da

$$\boxed{y(x) = 0 \quad \vee \quad y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{-\frac{3}{2}x^2 + c}}}$$

Esercizio 3

1) $4y'' - 4y' + y = 0$

$\longrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \qquad \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

$$\longrightarrow \boxed{y(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 x \cdot e^{\frac{1}{2}x}}$$

2) $3y'' + 5y' - 12y = 0 \longrightarrow 3\lambda^2 + 5\lambda - 12 = 0$

$\Delta = 25 - 3 \cdot 4 \cdot (-12) = 25 + 144 = 169 = 13^2$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 13}{6} \quad \lambda_1 = \dfrac{4}{3}, \quad \lambda_2 = -3$

$$\longrightarrow \boxed{y(x) = c_1 e^{\frac{4}{3}x} + c_2 e^{-3x}}$$

3) $y'' + 3y' + 3y = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 3\lambda + 3 = 0$

$\Delta = 9 - 12 = -3 < 0 \longrightarrow \sqrt{-3} = \sqrt{3\cdot(-1)} = i\sqrt{3}$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\longrightarrow \boxed{y(x) = e^{-\frac{3}{2}x}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right]}$$

4) $4y'' - 9y' + 5y = e^x$

Omogenea associata. $4y'' - 9y' + 5y = 0$

$\longrightarrow 4\lambda^2 - 9\lambda + 5 = 0 \qquad \Delta = 81 - 80 = 1$

$$\lambda_{1,2} = \frac{9 \pm 1}{8} \quad \begin{cases} \lambda_1 = 5/4 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \boxed{y_0(x) = c_1 e^{\frac{5}{4}x} + c_2 e^x}$$

Cerchiamo la soluzione particolare:

$$f(x) = e^x = p(x)\, e^{\lambda x}$$

con

- $\lambda = 1 \longrightarrow \lambda = \lambda_2$
- $p(x) = 1 \longrightarrow$ grado 0

Allora

$$y_p(x) = A\cdot x e^x \longrightarrow y_p'(x) = A e^x + A x e^x$$

$$\longrightarrow y_p''(x) = A e^x + A e^x + A x e^x = 2A e^x + A x e^x$$

Sostituendo nell'equazione:

$$4(2A e^x + A x e^x) - 9(A e^x + A x e^x) + 5 A x e^x = e^x$$

$$\longrightarrow 8A e^x + \cancel{4Ax e^x} - 9A e^x - \cancel{9Ax e^x} + \cancel{5Ax e^x} = e^x$$

$$\longrightarrow e^x[8A - 9A] = e^x \longrightarrow -A e^x = e^x \longrightarrow (-A-1)e^x = 0$$

$$\longrightarrow -A - 1 = 0 \longrightarrow A = -1$$

Dunque,

$$y_p(x) = -x e^x$$

$$\Longrightarrow \boxed{y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1 e^{5/4 x} + c_2 e^x - x e^x}$$

5) $y'' + y = \cos(2x)$

Omogenea associata: $y'' + y = 0 \rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda^2 = -1$

$\rightarrow \lambda_1 = i \vee \lambda_2 = -i$

$\rightarrow \boxed{y_0(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)}$

Soluzione particolare: poiché $f(x) = \cos(2x) = p(x)\, e^{\alpha x} \cos(\beta x)$
con

- $p(x) = 1 \rightarrow$ grado 0
- $\alpha = 0,\ \beta = 2 \rightarrow \alpha \pm i\beta \neq \lambda_1, \lambda_2$

allora

$y_p(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$

$\rightarrow y_p'(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$

$\rightarrow y_p''(x) = -4A\cos(2x) - 4B\sin(2x)$

sostituendo:

$-4A\cos(2x) - 4B\sin(2x) + A\cos(2x) + B\sin(2x) = \cos(2x)$

$\rightarrow -3A\cos(2x) - 3B\sin(2x) = \cos(2x)$

$\rightarrow (-3A - 1)\cos(2x) - 3B\sin(2x) = 0$

$\rightarrow \begin{cases} -3A - 1 = 0 \\ -3B = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ B = 0 \end{cases}$

$\rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{3}\cos(2x)$

$\rightarrow \boxed{y(x) = y_0(x) + y_p(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) - \frac{1}{3}\cos(2x)}$

6) $y'' + y' = x+1$

omogenea: $y'' + y' = 0 \rightarrow \lambda^2 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda(\lambda+1) = 0$

$\rightarrow \lambda_1 = 0 \vee \lambda_2 = -1$

$$\rightarrow \boxed{y_0(x) = c_1 + c_2 e^{-x}}$$

Soluzione particolare: visto che $f(x) = x+1 = p(x) e^{\lambda x}$ con

- $p(x) = x+1 \rightarrow$ grado 1
- $\lambda = 0 = \lambda_1$

allora

$y_p(x) = (Ax+B)\cdot x = Ax^2 + Bx \rightarrow y_p'(x) = 2Ax + B$

$\rightarrow y''_p(x) = 2A$

Sostituendo,

$2A + 2Ax + B = x+1 \rightarrow 2Ax - x + 2A + B - 1 = 0$

$\rightarrow (2A-1)x + 2A + B - 1 = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} 2A - 1 = 0 \\ 2A + B - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ 1 + B - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow y_p(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$\rightarrow \boxed{y(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2}x^2}$$

Esercizio 4

1) $\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = x \\ y(1) = \frac{1}{3} \end{cases}$

$a(x) = \frac{1}{x}$, $b(x) = x$

a continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e poiché $x_0 = 1$, scegliamo $I = (0, +\infty)$.

Il problema ammette un'unica soluzione $y: (0,+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Risolviamo l'equazione:

$$y(x) = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left[c + \int x e^{\int \frac{1}{x}dx} dx\right] = e^{-\ln|x|}\left[c + \int x e^{\ln|x|} dx\right]$$

Poiché $x \in (0,+\infty)$, $\ln|x| = \ln(x)$.

$= e^{-\ln(x)}\left[c+\int x\, e^{\ln(x)}dx\right] = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\left[c+\int x\cdot e^{\ln(x)}dx\right]$

$-\ln(x) = \ln(x^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

$= \frac{1}{x}\left[c+\int x\, x\, dx\right] = \frac{1}{x}\left[c+\int x^2 dx\right] = \frac{1}{x}\left[c+\frac{x^3}{3}\right]$

$e^{\ln(a)} = a$

Imponiamo $y(1)=\frac{1}{3}$:

$\frac{1}{3} = 1\cdot\left[c+\frac{1}{3}\right] \longrightarrow \frac{1}{3} = c+\frac{1}{3} \longrightarrow \boxed{c=0}$

La soluzione del problema è $y(x) = \frac{1}{\cancel{x}}\cdot\frac{x^{\cancel{3}\,2}}{3}$

$\longrightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{3}x^2}\quad , \quad y: (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

2) $\begin{cases} y' = \dfrac{2x-1}{y} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

$f(x) = 2x-1$ continua in $I = \mathbb{R}$

$g(y) = \frac{1}{y}$ di classe C^1 in $J = (0,+\infty)$

$\Rightarrow$ il problema ammette un'unica soluzione $y: I' \subseteq I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Poiché $g(y) = \frac{1}{y} \neq 0 \quad \forall y \in J$, divido per $g(y)$:

$\dfrac{y'}{\frac{1}{y}} = 2x-1 \longrightarrow y'\cdot y = 2x-1 \longrightarrow \int y\, dy = \int (2x-1)\, dx$

$\longrightarrow \frac{y^2}{2} = x^2 - x + c$

Impongo $y(1)=1$: $\quad \frac{1}{2} = 1-1+c \longrightarrow \boxed{c=\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = x^2 - x + \frac{1}{2} \longrightarrow y^2 = 2x^2 - 2x + 1$

$\longrightarrow y(x) = \pm\sqrt{2x^2-2x+1}$ Scelgo $+$ perché $y_0 = 1 > 0$

$\longrightarrow y(x) = \sqrt{2x^2-2x+1}$

Determiniamo ora I': $\quad 2x^2-2x+1 \geq 0$

$\Delta = 4 - 4\cdot 2\cdot 1 = 4-8 = -4 < 0 \longrightarrow 2x^2-2x+1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Allora $I' = I = \mathbb{R}$.

La soluzione del problema è $y: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\boxed{y(x) = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}}$$

3) $\begin{cases} y' - 2xy = e^{x^2} \\ y(0) = 2 \end{cases}$ $\quad a(x) = -2x$, $b(x) = e^{x^2}$ continue in $I = \mathbb{R}$

Il problema ammette un'unica soluzione $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$y(x) = e^{\int 2x\,dx}\left[c + \int e^{x^2} e^{-\int 2x\,dx}\,dx\right]$$

$$= e^{x^2}\left[c + \int e^{x^2} e^{-x^2}\,dx\right] = e^{x^2}\left[c + \int dx\right]$$

$$= ce^{x^2} + xe^{x^2}$$

Imponiamo $y(0) = 2$: $\quad 2 = c + 0 \rightarrow \boxed{c = 2}$

La soluzione del problema è $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\boxed{y(x) = (2 + x)\, e^{x^2}}$$

4) $\begin{cases} y'' - y = x^2 \\ y(0) = -2 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ $\quad f(x) = x^2$ continua in $I = \mathbb{R}$

Il problema ammette un'unica soluzione $y: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Omogenea: $y'' - y = 0 \longrightarrow \lambda^2 - 1 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = -1 \vee \lambda_1 = 1$

$$\rightarrow \boxed{y_0(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}}$$

Soluzione particolare: essendo $f(x) = x^2 = p(x)\, e^{\lambda x}$ con

- $p(x) = x^2 \longrightarrow$ grado 2
- $\lambda = 0 \neq \lambda_1, \lambda_2$

allora

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C \longrightarrow y_p'(x) = 2Ax + B \longrightarrow y_p''(x) = 2A$$

Sostituendo,

$$2A - Ax^2 - Bx - C = x^2$$

$$\rightarrow (-A-1)x^2 - Bx + 2A - C = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} -A-1=0 \\ -B=0 \\ 2A-C=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=0 \\ C=-2 \end{cases}$$

$$\rightarrow y_p(x) = -x^2 - 2$$

Allora l'integrale generale è

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} - x^2 - 2}$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

- $y(0) = -2 \rightarrow \cancel{-2} = c_1 + c_2 \cancel{-2} \rightarrow \boxed{c_1 + c_2 = 0}$

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} - 2x$$

- $y'(0) = 2 \rightarrow \boxed{-c_1 + c_2 = 2}$

$$\rightarrow \begin{cases} c_1+c_2=0 \\ -c_1+c_2=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2=-c_1 \\ -2c_1=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} c_2=1 \\ c_1=-1 \end{cases}$$

La soluzione del problema è $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\boxed{y(x) = -e^{-x} + e^{x} - x^2 - 2}$$

5) $\begin{cases} 3y''+5y'-2y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=\frac{7}{3} \end{cases}$ $\quad f(x)=0$ continua in $\mathbb{R}$

Il problema ha un'unica soluzione $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$3y''+5y'-2y=0 \rightarrow 3\lambda^2+5\lambda-2=0$$

$$\Delta = 25+24=49 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-5\pm7}{6} \begin{cases} \lambda_1 = 1/3 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

L'integrale generale è

$$y(x) = c_1 e^{1/3 x} + c_2 e^{-2x}$$

Imponiamo le condizioni iniziali:

- $y(0) = 0 \longrightarrow \boxed{c_1 + c_2 = 0}$

$$y'(x) = \frac{1}{3} c_1 e^{1/3 x} - 2c_2 e^{-2x}$$

- $y'(0) = \frac{7}{3} \longrightarrow \boxed{\frac{1}{3} c_1 - 2c_2 = \frac{7}{3}}$

$$\longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \frac{1}{3} c_1 - 2c_2 = \frac{7}{3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ \frac{1}{3} c_1 + 2c_1 = \frac{7}{3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ \frac{7}{3} c_1 = \frac{7}{3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} c_2 = -1 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

La soluzione del problema è $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ data da

$$\boxed{y(x) = e^{1/3 x} - e^{-2x}}$$