ESERCIZI PER IL CORSO DI MATEMATICA– CORSO DI LAUREA TRIENNALE IN SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI

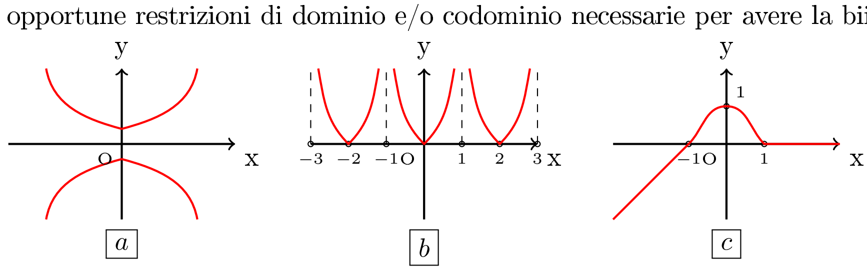
Docente: Alessio Barbieri, **E-mail:** alessio.barbieri@unitus.it

1. Funzioni Reali di Variabile Reale

Esercizio 1. Determinare il dominio delle seguenti funzioni

$$
\begin{array}{lll}
y = \dfrac{x^2-1}{x} & y = \dfrac{x^2+3x+7}{x-5} & y = \dfrac{x+4}{x^2-2x+1} \\
y = \dfrac{x^2-3x+1}{x^2-5x+6} & y = \ln(x^2+x) & y = \dfrac{\ln(x)}{x^2-x} \\
y = \sqrt{x^2-3x+2} & y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-6x+9} & y = \dfrac{\sqrt[3]{\sin(x)}}{\ln(3x+1)} \\
y = \sqrt{\ln(x)} & y = \ln(e^x-1) & y = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x}} \\
y = \dfrac{\ln(x^2+1)}{\cos(x)} & y = \dfrac{x^3+3x^2+4x+7}{\sqrt{e^x}} & y = \ln\left(\dfrac{x^2+5}{x^2}\right).
\end{array}
$$

Esercizio 2. Per ognuno dei seguenti, dire se si tratta del grafico di una funzione. In caso affermativo, dire se è il grafico di una funzione iniettiva, suriettiva e/o biiettiva. Nel caso non rappresentasse una funzione biiettiva, indicare opportune restrizioni di dominio e/o codominio necessarie per avere la biiettività.



Esercizio 3. Per ognuna delle seguenti coppie di funzioni f, g, si determinino, quando esistono, $f \circ g$ e $g \circ f$.

$$
\begin{aligned}
f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3, &\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \sin(x) \\
f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x, &\quad g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}, g(x) = \sqrt{x} \\
f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = |x|, &\quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = \cos(x) \\
f : [-1, 1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}], f(x) = \arcsin(x), &\quad g : \mathbb{R} \to (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}), g(x) = \arctan(x)
\end{aligned}
$$

Esercizio 4. Per ognuna delle seguenti funzioni, si determinino: dominio, intersezione con gli assi, segno ed eventuali simmetrie. Riportare le informazioni ottenute nel piano cartesiano.

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{2x^2 - x - 1} \qquad f(x) = \frac{x^2 + 1}{4x} \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 4}}{x}.$$

Esercizio 1

1) $y = \frac{x^2-1}{x}$ Essendo una funzione razionale fratta basta chiedere $x \neq 0$

$\rightarrow \boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

2) $y = \frac{x^2+3x+7}{x-5} \rightarrow \boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{5\}}$

3) $y = \frac{x+4}{x^2-2x+1} \rightarrow x^2-2x+1 \neq 0 \qquad \Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4-4=0$

$\rightarrow x_1 = x_2 = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow x \neq 1 \rightarrow \boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$

4) $y = \frac{x^2-3x+1}{x^2-5x+6} \rightarrow x^2-5x+6 \neq 0 \qquad \Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25-24=1$

$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $x_1 = 3$, $x_2 = 2$ $\rightarrow x \neq 2 \wedge x \neq 3 \rightarrow \boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{2,3\}}$

5) $y = \ln(x^2+x)$ L'argomento del logaritmo deve essere sempre positivo:

$x^2+x > 0 \rightarrow x(x+1) > 0 \rightarrow x < -1 \vee x > 0$

$\rightarrow \boxed{D = (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)}$

6) $y = \frac{\ln(x)}{x^2-x}$ ← l'argomento del logaritmo positivo $(x>0)$

← denominatore $\neq 0$ $(x^2-x \neq 0)$

se $x>0$ è già $\neq 0$

$\rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x(x-1) \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 0 \wedge x \neq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$

$\rightarrow \boxed{D = (0, +\infty) \setminus \{1\} = (0,1) \cup (1, +\infty)}$

7) $y=\sqrt{x^2-3x+2}$ L'argomento della radice quadrata deve essere ≥ 0.

$$x^2-3x+2 \geq 0$$

Equazione associata: $x^2-3x+2=0$

$$\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot 2 = 9-8=1 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{3\pm 1}{2} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 1$$

$\longrightarrow$ soluzione disequazione: $x \leq 1 \vee x \geq 2$

$$\longrightarrow \boxed{D=(-\infty,1] \cup [2,+\infty)}$$

8) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-6x+9}$ $\leftarrow$ radice quadrata: radicando ≥ 0 $\leftarrow$ denominatore $\neq 0$

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x^2-6x+9 \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2-6x+9 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4\cdot 1\cdot 9 = 36-36 = 0$$

$$x_1 = x_2 = \frac{6}{2} = 3$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 3 \end{cases} \longrightarrow \boxed{D=[1,+\infty)\setminus\{3\} = [1,3)\cup(3,+\infty)}$$

9) $y = \dfrac{\sqrt[3]{\sin(x)}}{\ln(3x+1)}$ La radice cubica è definita in tutto $\mathbb{R}$, quindi il dominio si riduce allo studio del denominatore:

$$\begin{cases} 3x+1>0 & \text{(il logaritmo deve essere definito: argomento} > 0) \\ \ln(3x+1) \neq 0 & \text{(denominatore} \neq 0) \end{cases}$$

Poiché un logaritmo è 0 se e solo se il suo argomento è 1,

$$\begin{cases} 3x+1 > 0 \\ 3x+1 \neq 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ 3x \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{3} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

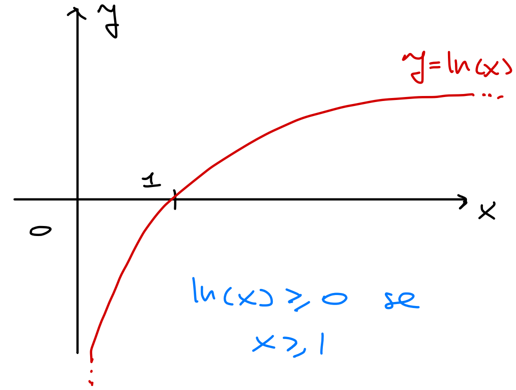
$$\longrightarrow \boxed{D=\left(-\tfrac{1}{3},+\infty\right)\setminus\{0\} = \left(-\tfrac{1}{3},0\right)\cup(0,+\infty)}$$

10) $y = \sqrt{\ln(x)}$

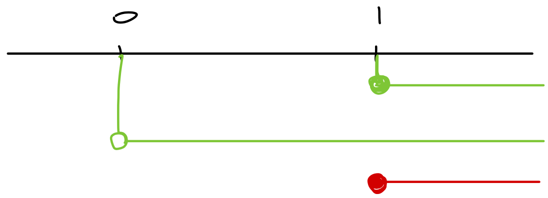
$$\begin{cases} \ln(x) \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

$\leftarrow$ radice quadrata: argomento ≥ 0

$\leftarrow$ logaritmo: argomento > 0



$$\rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x > 0 \end{cases}$$

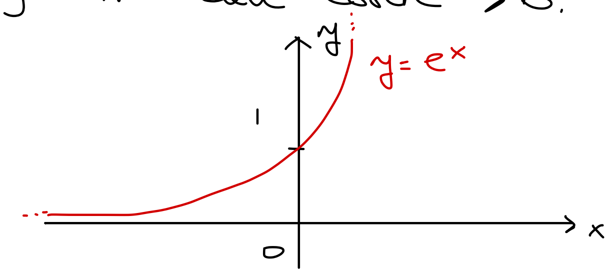


$\rightarrow x \geq 1 \rightarrow \boxed{D = [1, +\infty)}$

11) $y = \ln(e^x - 1)$. L'argomento del logaritmo deve essere > 0.

$e^x - 1 > 0 \longrightarrow e^x > 1$

$\rightarrow x > 0 \rightarrow \boxed{D = (0, +\infty)}$



$e^x > 1$ quando $x > 0$

12) $y = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x}}$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x} \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$\leftarrow$ argomento radice quadrata ≥ 0

$\leftarrow$ denominatore $\neq 0$

Risolviamo la disequazione: essendo fratta studiamo numeratore e denominatore per poi fare la linea dei segni:

N: $x^2 - 1 \geq 0 \longrightarrow x^2 \geq 1 \longrightarrow x \leq -1 \vee x \geq 1$

D: $x \geq 0$

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
N	+	−	−	+
D	−	−	+	+
	−	+	−	+

$\dfrac{x^2-1}{x} \geq 0$ ⊕

$\rightarrow -1 \leq x \leq 0 \vee x \geq 1$

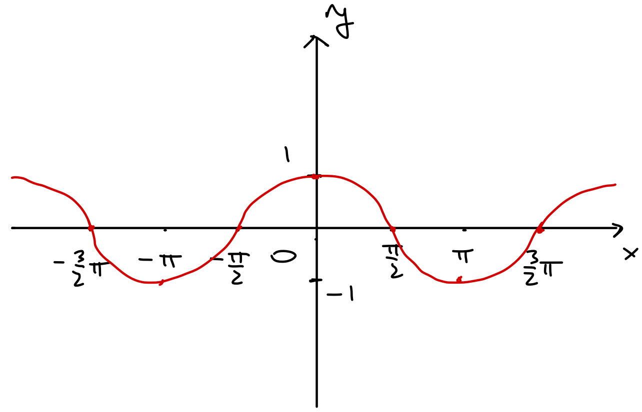
Quindi il sistema è diventato

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \vee x \geq 1 \\ x \neq 0 \end{cases} \longrightarrow -1 \leq x < 0 \vee x \geq 1$$

$\longrightarrow \boxed{D = [-1, 0) \cup [1, +\infty)}$

13) $y = \dfrac{\ln(x^2+1)}{\cos(x)}$

$$\begin{cases} x^2+1>0 & \text{argomento logaritmo} > 0 \\ \cos(x) \neq 0 & \text{denominatore} \neq 0 \end{cases}$$

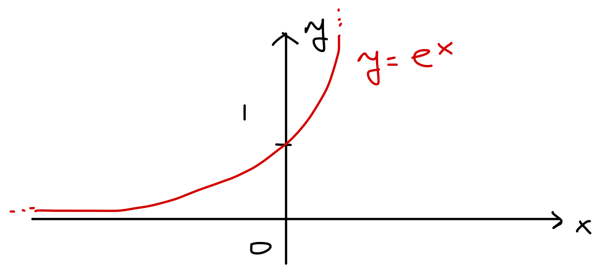


$$\rightarrow \begin{cases} x^2 > -1 & \forall x \in \mathbb{R} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\rightarrow \boxed{D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \cdot k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

14) $y = \dfrac{x^3+3x^2+4x+7}{\sqrt{e^x}}$



$$\begin{cases} \sqrt{e^x} \neq 0 & \text{denominatore} \neq 0 \\ e^x \geq 0 & \text{radicando} \geq 0 \end{cases}$$

$e^x > 0$ SEMPRE.

$$\rightarrow \begin{cases} e^x \neq 0 \\ e^x \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{cases} \rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow \boxed{D = \mathbb{R}}$$

15) $y = \ln\left(\dfrac{x^2+5}{x^2}\right)$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+5}{x^2} > 0 & \text{argomento logaritmo} > 0 \\ x^2 \neq 0 & \text{denominatore} \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+5}{x^2} > 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Risolviamo la prima:

N: $x^2+5>0 \rightarrow x^2 > -5 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D: $x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\rightarrow \dfrac{x^2+5}{x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

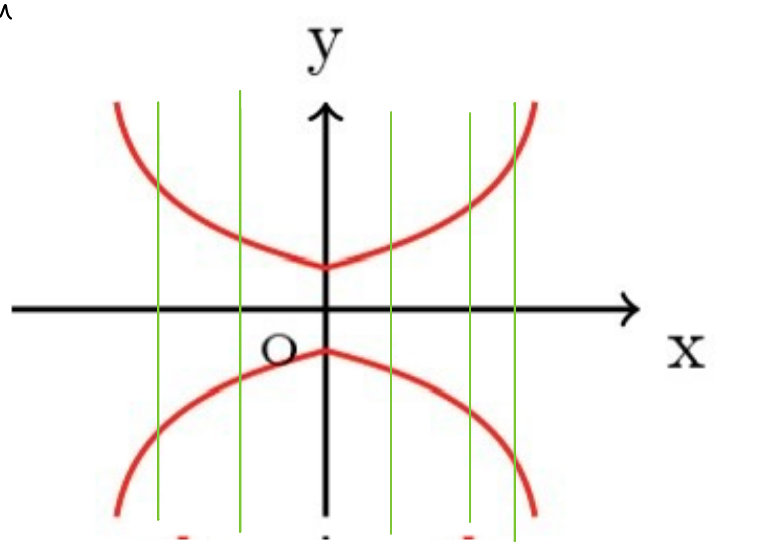
Tornando al sistema:

$$\rightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ x \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \rightarrow x \neq 0 \rightarrow \boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

Esercizio 2

$\boxed{a}$ Tracciando delle rette verticali si osserva che ognuna di queste interseca il grafico in rosso 2 volte.

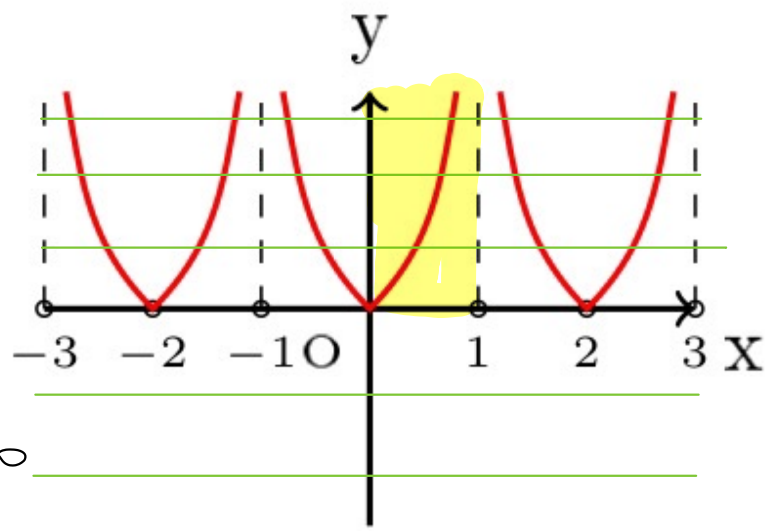
Quindi $\boxed{a}$ non è il grafico di una funzione.



$\boxed{b}$ Questo invece è il grafico di una funzione.

Tracciando rette orizzontali si ha che

- le rette $y=k$ con $k<0$ non intersecando mai il grafico $\longrightarrow$ f non suriettiva
- le rette $y=k$ con $k\geq 0$ intersecano più volte il grafico $\longrightarrow$ f non iniettiva



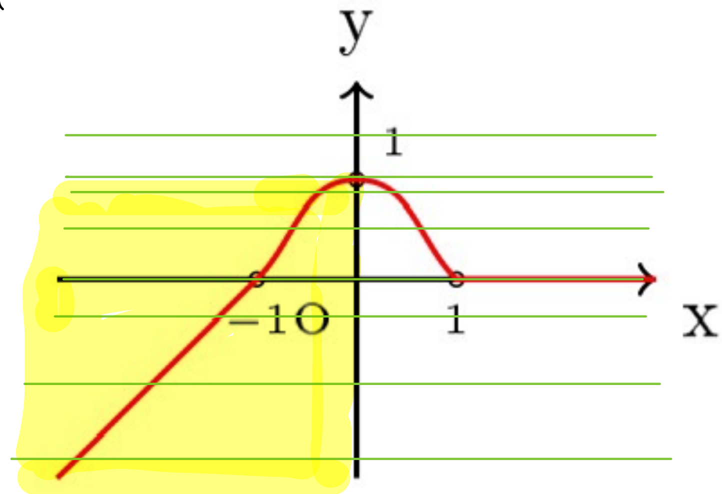
Per renderla suriettiva restringiamo il codominio a $\mathbb{R}^+_0 = [0,+\infty)$.

Per renderla iniettiva restringiamo il grafico a un ramo: ad esempio $D=[0,1)$, ma vanno bene anche $(-1,0]$, $(1,2]$, $[2,3)$, $[-2,-1)$, ecc...

Allora $f: [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}^+_0$ è biiettiva.

c) Anche questo è il grafico di una funzione.

Tracciando le rette orizzontali $y=k$ abbiamo che



- le rette $y=k$ per $k>1$ non incontrano mai il grafico $\rightarrow$ f <u>non</u> suriettiva
- le rette $y=k$ per $k \in [0,1]$ incontrano il grafico più volte $\rightarrow$ f <u>non</u> iniettiva

Per renderla suriettiva restringiamo il codominio a $(-\infty, 1]$.

Per renderla iniettiva restringiamo il dominio a $(-\infty, 0]$.

Quindi $f: (-\infty, 0] \rightarrow (-\infty, 1]$ è biiettiva.

Esercizio 3

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \longrightarrow D_f = \mathbb{R} \quad f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(x) \longrightarrow D_g = \mathbb{R} \quad g(\mathbb{R}) = [-1, 1]$

- $f \circ g$: serve che $g(D_g) \subseteq D_f$ cioè $[-1,1] \subseteq \mathbb{R}$. Questo è vero, quindi $f \circ g$ è definita e
  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^3 = \sin^3(x) \quad \forall x \in D_g = \mathbb{R}$.
- $g \circ f$: serve che $f(D_f) \subseteq D_g$ cioè $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}$. Questo è vero, quindi $g \circ f$ è definita e
  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin(f(x)) = \sin(x^3) \quad \forall x \in D_f = \mathbb{R}$

2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x \longrightarrow D_f = \mathbb{R}$ $\quad f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt{x} \longrightarrow D_g = [0, +\infty)$ $\quad g([0,+\infty)) = [0,+\infty)$

- $f \circ g$: poiché $g(D_g) = [0, +\infty) \subseteq \mathbb{R} = D_f$ allora
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{g(x)} = e^{\sqrt{x}} \quad \forall x \in D_g = [0, +\infty)$.

- $g \circ f$: poiché $f(D_f) = (0, +\infty) \subseteq [0, +\infty) = D_g$,
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{e^x} \quad \forall x \in D_f = \mathbb{R}$

3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| \longrightarrow D_f = \mathbb{R}$ $\quad f(\mathbb{R}) = [0, +\infty)$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \cos(x) \longrightarrow D_g = \mathbb{R}$ $\quad g(\mathbb{R}) = [-1, 1]$

- $f \circ g$: poiché $g(D_g) = [-1, 1] \subseteq \mathbb{R} = D_f$,
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = |g(x)| = |\cos(x)| \quad \forall x \in D_g = \mathbb{R}$

- $g \circ f$: poiché $f(D_f) = [0, +\infty) \subseteq \mathbb{R} = D_g$,
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \cos(f(x)) = \cos|x| \quad \forall x \in D_f = \mathbb{R}$.

4) $f: [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x) = \arcsin(x) \longrightarrow D_f = [-1, 1]$ $\quad f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$g\ \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \operatorname{arctg}(x) \to D_g = \mathbb{R}$ $\quad g(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

- $f \circ g$: poiché $g(D_g) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \not\subseteq D_f = [-1, 1]$ allora
$f \circ g$ non esiste!

- $g \circ f$: poiché $f(D_f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \subseteq \mathbb{R} = D_g$,
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \operatorname{arctg}(f(x)) = \operatorname{arctg}(\arcsin(x))$
$\forall x \in D_f = [-1, 1]$

Esercizio 4

1) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{2x^2 - x - 1}$

① DOMINIO. $2x^2 - x - 1 \neq 0$ $\qquad \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} \quad \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow x \neq -\frac{1}{2} \ \wedge \ x \neq 1 \longrightarrow \boxed{D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\tfrac{1}{2}, 1\right\}}$$

② SIMMETRIE: $f(-x) = \dfrac{e^{-x} - 1}{2(-x)^2 - (-x) - 1} = \dfrac{e^{-x} - 1}{2x^2 + x - 1}$

$\rightarrow f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x) \rightarrow f$ né pari, né dispari.

③ INTERSEZIONI ASSI:

□ asse y:

$$\begin{cases} y = \dfrac{e^x - 1}{2x^2 - x - 1} \\ x = 0 \end{cases} \longrightarrow y = \frac{e^0 - 1}{2 \cdot 0 - 0 - 1} = \frac{1 - 1}{-1} = 0$$

$\rightarrow (0,0)$ punto di intersezione con l'asse y.

□ asse x:

$$\begin{cases} y = \dfrac{e^x - 1}{2x^2 - x - 1} \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow \frac{e^x - 1}{2x^2 - x - 1} = 0 \longrightarrow \cancel{(2x^2 - x - 1)} \cdot \frac{e^x - 1}{\cancel{2x^2 - x - 1}} = \overbrace{0\,(2x^2 - x - 1)}^{0}$$

$\rightarrow e^x - 1 = 0 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = 0$

$\rightarrow (0,0)$ punto di intersezione con l'asse x.

④ SEGNO. $\dfrac{e^x - 1}{2x^2 - x - 1} > 0$

N: $e^x - 1 > 0 \rightarrow e^x > 1 \rightarrow x > 0$

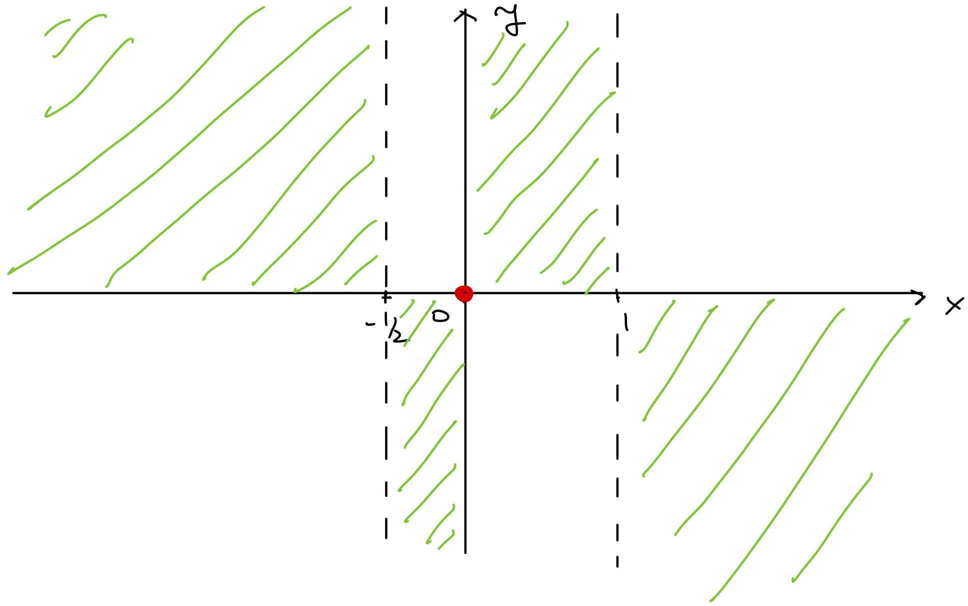
D: $2x^2 - x - 1 > 0$. L'equazione associata ha soluzione $x = -\frac{1}{2} \vee x = 1$,

$\rightarrow x < -\frac{1}{2} \vee x > 1$

		$-1/2$	0	1
N	−	−	+	+
D	+	−	−	+
	−	+	−	+

Allora $f(x) > 0$ se

$-\frac{1}{2} < x < 0 \vee x > 1$



2) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{4x}$

① DOMINIO: $\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{0\}}$

② SIMMETRIE: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+1}{4(-x)} = \dfrac{x^2+1}{-4x} = -\dfrac{x^2+1}{4x} = -f(x)$

$\longrightarrow$ f dispari

③ INTERSEZIONE CON ASSI:

- asse y: nessuna, dato che $0 \notin D$.
- asse x:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2+1}{4x} \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow \frac{x^2+1}{4x} = 0 \longrightarrow \cancel{4x} \cdot \frac{x^2+1}{\cancel{4x}} = \overbrace{0 \cdot 4x}^{0}$$

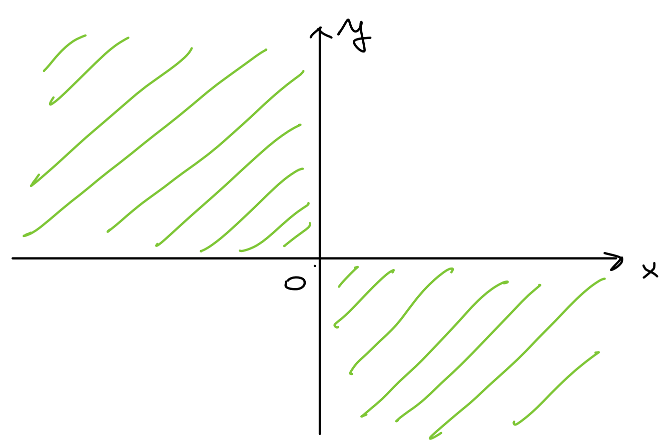
$\rightarrow x^2+1=0 \longrightarrow x^2=-1 \quad \nexists x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ nessuna intersezione.

④ SEGNO: $\dfrac{x^2+1}{4x} > 0$

N: $x^2+1>0 \longrightarrow x^2>-1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D: $4x>0 \longrightarrow x>0$

$\Longrightarrow f(x)>0$ quando $x>0$



3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-5x+4}}{x}$

① DOMINIO: $\begin{cases} x^2-5x+4 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$

Risolviamo la prima:

$x^2-5x+4 \geq 0 \longrightarrow$ eq. associata $x^2-5x+4=0$

$\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 25-16 = 9$

$\longrightarrow x_{1,2} = \dfrac{5 \pm 3}{2}$ $\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow x^2-5x+4 \geq 0$ se $x \leq 1 \vee x \geq 4$

Il sistema allora è

$\begin{cases} x \leq 1 \vee x \geq 4 \\ x \neq 0 \end{cases} \longrightarrow \boxed{D = (-\infty, 0) \cup (0, 1] \cup [4, +\infty)}$

② SIMMETRIE: $f(-x) = \dfrac{\sqrt{(-x)^2 - 5(-x)+4}}{-x} = -\dfrac{\sqrt{x^2+5x+4}}{x}$

$\rightarrow f(-x) \neq f(x)$ e $f(-x) \neq -f(x) \longrightarrow f$ né pari, né dispari

③ INTERSEZIONI ASSI:

- asse y: nessuna, dato che $0 \notin D$.
- asse x: $\begin{cases} y = \dfrac{\sqrt{x^2-5x+4}}{x} \\ y = 0 \end{cases} \longrightarrow \dfrac{\sqrt{x^2-5x+4}}{x} = 0$

$\longrightarrow \cancel{x}\,\dfrac{\sqrt{x^2-5x+4}}{\cancel{x}} = \overbrace{0 \cdot x}^{0} \longrightarrow \sqrt{x^2-5x+4} = 0 \longrightarrow x^2-5x+4=0$

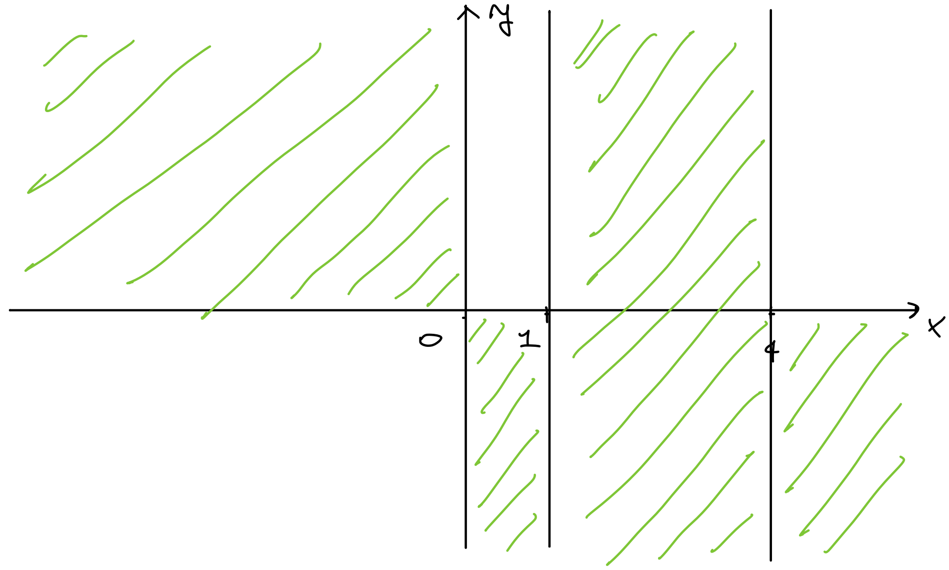
$\rightarrow x=1 \vee x=4$. Le intersezioni con l'asse x sono $(1,0)$ e $(4,0)$.

④ SEGNO: $\dfrac{\sqrt{x^2-5x+4}}{x} > 0$

N: $\sqrt{x^2-5x+4} > 0 \quad \forall x \in D \setminus \{1,4\}$: la radice dove esiste è ≥ 0

D: $x > 0$

	$x<0$	$0<x<1$	$1<x<4$	$x>4$
N	+	+		+
D	−	+		+
	−	+		+



y
x
0
1
4