3. Limiti di funzioni–Parte 2

Esercizio 1. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti sciogliendo le forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$ e $+\infty - \infty$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+7x-3}{x-9} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-3x+1}{-5x^2+3} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x-5}{x^2+x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+5x+9}{x^4+1} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2+74x}{x-18} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{8x^2+5x-1}{16x^2+10}$$

Esercizio 2. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2-x+4} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3x+1}{e^x+3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} (e^{-x}+x^5) \qquad \lim_{x\to+\infty} (\ln(x^5+3)-x) \qquad \lim_{x\to+\infty} (x^2-3x+\sqrt{x})$$

$$\lim_{x\to+\infty} (2^x-\ln(x)+x^2) \qquad \lim_{x\to-\infty} (x^7+3^{-x}+\ln(-x)) \qquad \lim_{x\to+\infty} (\ln(x)-\sqrt{\ln(x)})$$

Esercizio 3. Per ognuna delle seguenti funzioni, determinare gli eventuali asintoti (verticali, orizzontali, obliqui).

$$f(x) = \frac{e^x-1}{2x^2-x-1} \qquad f(x) = \frac{x^2+1}{4x} \qquad f(x) = e^x \frac{x}{x+4}$$

4. Le derivate–Parte 1

Esercizio 1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

$$y = x^3+4x+1 \qquad y = \frac{1}{2}x^2-2x \qquad y = 1+\sqrt[5]{x} \qquad y = x^4-3x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y = -\frac{5}{x} \qquad y = -2\ln(x) \qquad y = 5e^x\cdot\sin(x) \qquad y = 3x\cdot\ln(x)$$

$$y = e^x(x-3) \qquad y = \frac{x^2}{2-x^3} \qquad y = \frac{\sin(x)}{x} \qquad y = \frac{3x^2-2x+1}{3x-2}$$

$$y = \frac{x^2+\cos(x)}{\sin(x)} \qquad y = \frac{3x^2-2}{e^x} \qquad y = \frac{x^2}{\ln(x)} \qquad y = (3x^3-5x^2+1)^3$$

$$y = (2x^2-3x+1)^2 \qquad y = (2+\sin(x))^4 \qquad y = e^{\frac{2x}{x-1}} \qquad y = 5\ln(x^2+3)$$

$$y = 5\sqrt{x^2+2x+3} \qquad y = 3\sin(x^4) \qquad y = e^{\cos(x)} \qquad y = \ln(x^4-3x^2)$$

Esercizio 2. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico delle seguenti funzioni nei punti di ascissa x_0 indicati a fianco

$$y = \frac{x^2-4}{x},\ x_0 = 2; \qquad y = 5x+2\sin(x),\ x_0 = \pi; \qquad y = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2},\ x_0 = 1.$$

Esercizio 3. Determinare i punti critici delle seguenti funzioni e dire se sono massimi o minimi relativi

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \qquad y = \frac{1}{2}e^{x^2} \qquad y = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 \qquad y = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 - x + 1}$$

Esercizio 1

1) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+7x-3}{x-9} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

Tramite raccoglimento forzato,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+7x-3}{x-9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\cancel{2}}\left(3+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{9}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(3+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}{1-\frac{9}{x}}$$

$$= \frac{+\infty\,(3+0-0)}{1-0} = \frac{+\infty\cdot 3}{1} = \boxed{+\infty}$$

2) $$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-3x+1}{-5x^2+3} = \frac{+\infty}{-\infty} \quad \text{F.I.}$$

Tramite raccoglimento forzato,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-3x+1}{-5x^2+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(-5+\frac{3}{x^2}\right)} = \frac{4-0+0}{-5+0} = \boxed{-\frac{4}{5}}$$

3) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-5}{x^2+x+1} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

Tramite raccoglimento forzato,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-5}{x^2+x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(1-\frac{5}{x}\right)}{x^{\cancel{2}}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{5}{x}}{x\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{1-0}{+\infty\,(1+0+0)} = \frac{1}{+\infty} = \boxed{0}$$

4) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+5x+9}{x^4+1} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{F.I.}$$

Tramite raccoglimento forzato,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+5x+9}{x^4+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(1+\frac{5}{x^2}+\frac{9}{x^3}\right)}{x^{\cancel{4}}\left(1+\frac{1}{x^4}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{5}{x^2}+\frac{9}{x^3}}{x\left(1+\frac{1}{x^4}\right)}$$

$$= \frac{1+0+0}{+\infty\,(1+0)} = \frac{1}{+\infty} = \boxed{0}.$$

5) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2+74x}{x-18} = \frac{-\infty}{-\infty}$ F.I.

Tramite raccoglimento forzato,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2+74x}{x-18} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^{\cancel{2}}\left(-3+\frac{74}{x^2}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{18}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(-3+\frac{74}{x^2}\right)}{1-\frac{18}{x}}$$

$$= \frac{-\infty(-3+0)}{1-0} = \frac{-\infty\cdot(-3)}{1} = \boxed{+\infty}$$

6) $\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^2+5x-1}{16x^2+10} = \frac{+\infty-\infty}{+\infty}$ F.I.

Tramite raccoglimento forzato,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^2+5x-1}{16x^2+10} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(8+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(16+\frac{10}{x^2}\right)} = \frac{8+0-0}{16+0} = \frac{8}{16} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Esercizio 2

1) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2-x+4} = \frac{+\infty}{+\infty-\infty}$ F.I.

Dalla gerarchia degli infiniti, $e^x \gg x^2-x+4$ per $x\to+\infty$, quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2-x+4} = \boxed{+\infty}$$

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \frac{+\infty}{+\infty}$ F.I.

Dalla gerarchia degli infiniti, $\ln(x) \ll \sqrt{x} = x^{1/2}$ per $x\to+\infty$, quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \boxed{0}$$

3) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3x+1}{e^x+3} = \frac{+\infty}{+\infty}$ F.I.

Dalla gerarchia degli infiniti, $x^4+3x+1 \ll e^x+3$ per $x\to+\infty$, quindi

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+3x+1}{e^x+3} = \boxed{0}.$$

4) $\lim_{x\to-\infty} (e^{-x}+x^5) = e^{+\infty}+(-\infty)^5 = +\infty-\infty$ F.I.

Raccogliamo e^{-x}:

$$= \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(1+\frac{x^5}{e^{-x}}\right)$$

Poiché $x^5 << e^{-x}$ per $x\to-\infty$, si ha che $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5}{e^{-x}}=0$, quindi

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}\left(1+\frac{x^5}{e^{-x}}\right) = e^{+\infty}(1+0) = e^{+\infty} = \boxed{+\infty}$$

5) $\lim_{x\to+\infty} (\ln(x^5+3)-x) = \ln(+\infty)-\infty = +\infty-\infty$ F.I.

Raccogliamo x:

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln(x^5+3)}{x}-1\right)$$

Poiché $\ln(x^5+3) << x$ per $x\to+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^5+3)}{x} = 0$ e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln(x^5+3)}{x}-1\right) = +\infty\cdot(0-1) = \boxed{-\infty}$$

6) $\lim_{x\to+\infty} (x^2-3x+\sqrt{x}) = +\infty-\infty+\infty = +\infty-\infty$ F.I.

Metodo del raccoglimento forzato:

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

$\sqrt{x} = x^{1/2} \to \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{x^{1/2}}{x^2} = \frac{1}{x^{2-1/2}} = \frac{1}{x^{3/2}}$

$$= +\infty(1-0+0) = \boxed{+\infty}$$

7) $\lim_{x\to+\infty} (2^x-\ln(x)+x^2) = 2^{+\infty}-\ln(+\infty)+\infty = +\infty-\infty$ F.I.

Raccogliamo 2^x:

$$= \lim_{x\to+\infty} 2^x\left(1-\frac{\ln(x)}{2^x}+\frac{x^2}{2^x}\right)$$

Poiché $\ln(x) << 2^x$ e $x^2 << 2^x$ quando $x\to+\infty$, allora

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{2^x} = 0$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2^x} = 0$ e quindi

$$\lim_{x\to+\infty} 2^x\left(1-\frac{\ln(x)}{2^x}+\frac{x^2}{2^x}\right) = 2^{+\infty}(1-0+0) = \boxed{+\infty}$$

8) $\lim_{x\to-\infty}(x^7+3^{-x}+\ln(-x)) = (-\infty)^7+3^{+\infty}+\ln(+\infty) = -\infty+\infty$ F.I.

Raccolgo 3^{-x}:

$$= \lim_{x\to-\infty} 3^{-x}\left(\frac{x^7}{3^{-x}}+1+\frac{\ln(-x)}{3^{-x}}\right)$$

Poiché $x^7 << 3^{-x}$ e $\ln(-x) << 3^{-x}$ se $x\to-\infty$, allora

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^7}{3^{-x}} = 0, \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{\ln(-x)}{3^{-x}} = 0$$

e quindi

$$\lim_{x\to-\infty} 3^{-x}\left(\frac{x^7}{3^{-x}}+1+\frac{\ln(-x)}{3^{-x}}\right) = 3^{+\infty}(0+1+0) = \boxed{+\infty}$$

9) $\lim_{x\to+\infty}(\ln(x)-\sqrt{\ln(x)}) = +\infty-\infty$ F.I.

Raccolgo $\ln(x)$:

$$= \lim_{x\to+\infty}\ln(x)\left(1-\frac{\sqrt{\ln(x)}}{\ln(x)}\right) = \lim_{x\to+\infty}\ln(x)\left(1-\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}\right)$$

$$= +\infty\left(1-\frac{1}{+\infty}\right) = +\infty\cdot 1 = \boxed{+\infty}$$

Esercizio 3

1) $f(x) = \dfrac{e^x-1}{2x^2-x-1}$

Dominio: $2x^2-x-1 \neq 0$ $\quad \Delta = (-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1) = 1+8 = 9$

$x_{1,2} = \dfrac{1\pm 3}{4}$ $\quad x_1 = 1$, $\quad x_2 = -\frac{1}{2}$ $\quad \Rightarrow D = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}, 1\}$

Segno del denominatore: $2x^2-x-1>0$ se $x<-\frac{1}{2} \vee x>1$

Asintoti verticali: candidati $x=-\frac{1}{2}$ e $x=1$

$\#$ $x=-\frac{1}{2}$: $\lim_{x\to-\frac{1}{2}^+}\dfrac{e^x-1}{2x^2-x-1} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{e}}-1}{0^-} = +\infty$

$(2x^2-x-1)$ negativo se $x>-\frac{1}{2}$; $\quad \frac{1}{\sqrt{e}}-1 < 0$

$\lim_{x\to-\frac{1}{2}^-}\dfrac{e^x-1}{2x^2-x-1}$ $\quad (2x^2-x-1)$ positivo se $x<-\frac{1}{2}$

$= \dfrac{\frac{1}{\sqrt{e}}-1}{0^+} = -\infty$ $\quad \frac{1}{\sqrt{e}}-1 < 0$

$\boxed{x=-\frac{1}{2} \text{ asintoto verticale}}$

□ $x=1$: poiché $2x^2-x-1>0$ per $x>1$ e <0 per $x<1$,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x-1}{2x^2-x-1} = \frac{e-1}{0^+} \overset{>0}{} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{e^x-1}{2x^2-x-1} = \frac{e-1}{0^-} \overset{>0}{} = -\infty$$

$\boxed{x=1 \text{ asintoto verticale}}$

Asintoti orizzontali:

□ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{2x^2-x-1} = +\infty$ per gerarchia degli infiniti

$\Rightarrow$ non ci sono asintoti orizzontali se $x\to+\infty$

□ $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-1}{2x^2-x-1} = \frac{0-1}{+\infty+\infty-1} = \frac{-1}{+\infty} = 0 \longrightarrow$ $\boxed{y=0 \text{ asintoto orizzontale per } x\to-\infty}$

Asintoti obliqui: (solo per $x\to+\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{2x^2-x-1}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x(2x^2-x-1)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{2x^3-x^2-x} = +\infty$$ per gerarchia degli infiniti

$\longrightarrow$ non ci sono asintoti obliqui

2) $f(x) = \frac{x^2+1}{4x}$

Dominio: $D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Asintoti verticali: $x=0$ candidato

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{4x} = \frac{0+1}{4\cdot 0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{4x} = \frac{0+1}{4\cdot 0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$\boxed{x=0 \text{ asintoto verticale}}$

Asintoti orizzontali:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{4x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{4\cancel{x}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{4} = \frac{\pm\infty\,(1+0)}{4}$$

$= \pm\infty \longrightarrow$ non ci sono asintoti orizzontali

Asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{4x}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+1}{4x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}(1+\frac{1}{x^2})}{4\cancel{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{4} = \frac{1+0}{4} = \frac{1}{4} =: m$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+1}{4x} - \frac{1}{4}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{4x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{4x} = \frac{1}{4\cdot\infty} = 0 =: q$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{y = \frac{1}{4}x \text{ asintoto obliquo}}$ sia per $x\to+\infty$ che per $x\to-\infty$

3) $f(x) = e^x \cdot \frac{x}{x+4}$

Dominio: $D = \mathbb{R}\setminus\{-4\}$

Asintoti verticali: $x=-4$ candidato

$$\lim_{x\to-4^+} e^x \frac{x}{x+4} = e^{-4}\cdot\frac{(-4)}{0^+} = -\infty$$

<0, >0

$$\lim_{x\to-4^-} e^x \frac{x}{x+4} = e^{-4}\frac{(-4)}{0^-} = +\infty$$

$\boxed{x=-4 \text{ asintoto verticale}}$

Asintoti orizzontali:

- $$\lim_{x\to+\infty} e^x \frac{x}{x+4} = \lim_{x\to+\infty} e^x \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+4} = \lim_{x\to+\infty} e^x \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1+\frac{4}{x})}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} e^x \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{4}{x}} = +\infty\cdot\frac{1}{1+0} = +\infty$$

$\longrightarrow$ nessun asintoto verticale per $x\to+\infty$

- $$\lim_{x\to-\infty} e^x \frac{x}{x+4} = \lim_{x\to-\infty} e^x \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x+4} = \lim_{x\to-\infty} e^x \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(1+\frac{4}{x})}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} e^x \cdot \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\frac{4}{x}} = 0\cdot\frac{1}{1+0} = 0\cdot 1 = 0$$

$\longrightarrow$ $\boxed{y=0 \text{ asintoto orizzontale per } x\to-\infty}$

Asintoti obliqui: (solo per $x \to +\infty$)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^x \cdot \frac{\cancel{x}}{x+4} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x+4} = +\infty$$ per gerarchia infiniti

$\longrightarrow$ non ci sono asintoti obliqui

Esercizio 1

1) $y = x^3+4x+1 \longrightarrow y' = 3x^{3-1}+4 = 3x^2+4$

2) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x \longrightarrow y' = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}x - 2 = x-2$

3) $y = 1+\sqrt[5]{x} = 1+x^{1/5} \longrightarrow y' = 0 + \frac{1}{5}x^{1/5 - 1} = \frac{1}{5}x^{-4/5} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

4) $y = x^4 - 3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x^4 - 3x^2 + x^{-1/2}$

$\longrightarrow y' = 4x^3 - 3\cdot 2x - \frac{1}{2}x^{-1/2-1} = 4x^3 - 6x - \frac{1}{2}x^{-3/2}$

$= 4x^3 - 6x - \frac{1}{2\sqrt[2]{x^3}}$

5) $y = -\frac{5}{x} = -5\cdot\frac{1}{x} = -5\cdot x^{-1} \longrightarrow y' = -5\cdot(-1)x^{-1-1}$

$= +5x^{-2} = \frac{5}{x^2}$

6) $y = -2\ln(x) \longrightarrow y' = -2\cdot\frac{1}{x} = -\frac{2}{x}$

7) $y = 5e^x \cdot \sin(x) \longrightarrow y' = 5\left[(e^x)'\sin(x) + e^x(\sin(x))'\right]$

$= 5\left[e^x\sin(x) + e^x\cos(x)\right]$

$= 5e^x\left[\sin(x) + \cos(x)\right]$

8) $y = 3x\cdot\ln(x) \longrightarrow y' = 3\left[1\cdot\ln(x) + \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\right] = 3\left[\ln(x)+1\right]$

9) $y = e^x(x-3) \longrightarrow y' = e^x(x-3) + e^x\cdot 1 = e^x(x-3+1)$

$= e^x(x-2)$

10) $y = \frac{x^2}{2-x^3} \longrightarrow y' = \frac{2x\cdot(2-x^3) - (-3x^2)\cdot x^2}{(2-x^3)^2}$

$= \frac{4x - 2x^4 + 3x^4}{(2-x^3)^2} = \frac{x^4 - 4x}{(2-x^3)^2}$

11) $y=\frac{\sin(x)}{x} \longrightarrow y'=\frac{\cos(x)\cdot x-\sin(x)}{x^2}$

12) $y=\frac{3x^2-2x+1}{3x-2} \longrightarrow y'=\frac{(6x-2)(3x-2)-3(3x^2-2x+1)}{3x-2}$

$$=\frac{18x^2-\cancel{6x}-12x+4-9x^2+\cancel{6x}-3}{3x-2}$$

$$=\frac{9x^2-12x+1}{3x-2}$$

13) $y=\frac{x^2+\cos(x)}{\sin(x)} \longrightarrow y'=\frac{(2x-\sin(x))\sin(x)-\cos(x)(x^2+\cos(x))}{\sin^2(x)}$

$$=\frac{2x\sin(x)-\sin^2(x)-x^2\cos(x)-\cos^2(x)}{\sin^2(x)}$$

ricordate che
$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$

$$=\frac{2x\sin(x)-x^2\cos(x)-1}{\sin^2(x)}$$

14) $y=\frac{3x^2-2}{e^x} \longrightarrow y'=\frac{6x\cdot e^x-(3x^2-2)e^x}{(e^x)^2}=\frac{(-3x^2+6x+2)\cancel{e^x}}{(e^x)^{\cancel{2}}}$

$$=\frac{-3x^2+6x+2}{e^x}$$

15) $y=\frac{x^2}{\ln(x)} \longrightarrow y'=\frac{2x\cdot\ln(x)-x^{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}}{\ln^2(x)}=\frac{2x\ln(x)-x}{\ln^2(x)}$

16) $y=(3x^3-5x^2+1)^3=f(g(x))$ con $f(x)=x^3$, $g(x)=3x^3-5x^2+1$

$\longrightarrow y'=f'(g(x))\cdot g'(x)=3(3x^3-5x^2+1)^2\cdot(9x^2-10x)$

17) $y=(2x^2-3x+1)^2=f(g(x))$ con $f(x)=x^2$, $g(x)=2x^2-3x+1$

$\longrightarrow y'=2(2x^2-3x+1)\cdot(4x-3)$

$=2(4x-3)(2x^2-3x+1)$

18) $y=(2+\sin(x))^4=f(g(x))$ con $f(x)=x^4$, $g(x)=2+\sin(x)$

$\longrightarrow y'=4(2+\sin(x))^3\cdot\cos(x)$

19) $y=e^{\frac{2x}{x-1}}=f(g(x))$ con $f(x)=e^x$, $g(x)=\frac{2x}{x-1}$

$\longrightarrow y'=e^{\frac{2x}{x-1}}\cdot\left(\frac{2x}{x-1}\right)'=e^{\frac{2x}{x-1}}\frac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2}$

$=e^{\frac{2x}{x-1}}\frac{\cancel{2x}-2-\cancel{2x}}{(x-1)^2}=-2e^{\frac{2x}{x-1}}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}$

20) $y = 5\ln(x^2+3) = 5f(g(x))$ con $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = x^2+3$

$\longrightarrow y' = 5 \cdot \frac{1}{x^2+3} \cdot 2x = \frac{10x}{x^2+3}$

21) $y = 5\sqrt{x^2+2x+3} = 5(x^2+2x+3)^{1/2} = 5f(g(x))$

con $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$, $g(x) = x^2+2x+3$

$\longrightarrow y' = 5 \cdot \frac{1}{2}(x^2+2x+3)^{1/2-1} \cdot (2x+2)$ $\qquad \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$= \frac{5 \cdot \cancel{2}(x+1)}{\cancel{2}\sqrt{(x^2+2x+3)^2}} = \frac{5(x+1)}{\sqrt{(x^2+2x+3)^2}}$

22) $y = 3\sin(x^4) = 3 \cdot f(g(x))$ con $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = x^4$

$\longrightarrow y' = 3\cos(x^4) \cdot 4x^3 = 12x^3\cos(x^4)$

23) $y = e^{\cos(x)} = f(g(x))$ con $f(x) = e^x$, $g(x) = \cos(x)$

$\longrightarrow y' = e^{\cos(x)} \cdot (-\sin(x))$

24) $y = \ln(x^4 - 3x^2) = f(g(x))$ con $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = x^4 - 3x^2$

$\longrightarrow y' = \frac{1}{x^4-3x^2} \cdot (4x^3 - 6x) = \frac{4x^3-6x}{x^4-3x^2} = \frac{4x^2-6}{x^3-3x}$

Esercizio 2

1) $f(x) = \frac{x^2-4}{x}$, $x_0 = 2$

$f(x_0) = f(2) = \frac{2^2-4}{2} = \frac{4-4}{2} = 0$

$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2-4)}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 + 4}{x^2} = \frac{x^2+4}{x^2}$

$\longrightarrow f'(x_0) = f'(2) = \frac{2^2+4}{2^2} = \frac{8}{4} = 2$

L'equazione della retta tangente cercata è

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \longrightarrow y = 2(x-2) \longrightarrow \boxed{y = 2x - 4}$

2) $f(x) = 5x + 2\sin(x)$, $x_0 = \pi$

$$f(x_0) = f(\pi) = 5\pi + 2\sin(\pi) = 5\pi + 2\cdot 0 = 5\pi$$

$$f'(x) = 5 + 2\cos(x) \longrightarrow f'(x_0) = 5 + 2\cos(\pi) = 5 + 2\cdot(-1) = 5 - 2 = 3$$

L'equazione della retta tangente è

$$y - 5\pi = 3(x - \pi) \longrightarrow y = 3x - 3\pi + 5\pi \longrightarrow \boxed{y = 3x + 2\pi}$$

3) $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{4 - x^2}$, $x_0 = 1$

$$f(1) = \frac{1}{2}\sqrt{4-1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}(4-x^2)^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(4-x^2)^{-1/2}\cdot(-\cancel{2}x)$$

$$= -\frac{x}{2\sqrt{4-x^2}}$$

$$\longrightarrow f'(1) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2\cdot 3} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

L'equazione della retta tangente è

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{6}(x - 1) \longrightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\longrightarrow \boxed{y = -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{2}{3}\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{6} = \frac{\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}_{3}}\sqrt{3}$$

Esercizio 3

1) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ $\qquad D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2-4)^2}$$

Quindi,

$$f'(x) = 0 \longrightarrow -\frac{2x}{(x^2-4)^2} = 0 \longrightarrow 2x = 0 \longrightarrow x = 0$$

L'unico punto critico di f è $x = 0$. Studiamo il segno di f':

$$f'(x) > 0 \longrightarrow -\frac{2x}{(x^2-4)^2} > 0 \longrightarrow \frac{2x}{(x^2-4)^2} < 0$$

N: $2x > 0 \longrightarrow x > 0$

D: $(x^2-4)^2 > 0 \quad \forall x \in D$ (c'è un quadrato, quindi sempre ≥ 0)

		0	
N	$-$		$+$
D	$+$		$+$
	$-$		$+$

$-$

$\frac{2x}{(x^2-4)^2} < 0$

Quindi $f'(x) > 0 \iff -\frac{2x}{(x^2-4)^2} > 0 \iff \frac{2x}{(x^2-4)^2} < 0$. Perciò

- $f'(x) > 0$ se $x > 0$
- $f'(x) < 0$ se $x < 0$

In $x_0 = 0$ f passa dall'essere crescente all'essere decrescente, quindi $\boxed{x_0 = 0 \text{ punto di massimo relativo}}$

2) $f(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} \qquad D = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{1}{\cancel{2}} e^{x^2} \cdot \cancel{2}x = x e^{x^2}$

$f'(x) = 0 \longrightarrow x \underbrace{e^{x^2}}_{\neq 0 \ \forall x} = 0 \longrightarrow x = 0$ unico punto critico.

Ora,

$f'(x) > 0 \longrightarrow x e^{x^2} > 0 \xrightarrow{e^{x^2} > 0 \ \forall x} x > 0$

	0	
$-$		$+$
↘		↗

In $x = 0$ f passa da decrescente a crescente, quindi

$\boxed{x_0 = 0 \text{ punto di minimo relativo}}$

3) $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3} x^3 \qquad D = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 - \frac{2}{3} \cdot 3x^2 = x^3 - 2x^2$

$f'(x) = 0 \longrightarrow x^3 - 2x^2 = 0 \longrightarrow x^2(x-2) = 0 \longrightarrow \boxed{x = 0 \vee x = 2}$ punti critici

Studiamo il segno di f':

$f'(x) = x^2(x-2) > 0$

① $x^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$

② $x - 2 > 0 \longrightarrow x > 2$

	↘	0	↘	2	↗
①	$+$		$+$		$+$
②	$-$		$-$		$+$
	$-$		$-$		$+$

In $x_0 = 2$ f passa da decrescente a crescente $\Rightarrow$ $\boxed{x_0 = 2 \text{ punto di minimo relativo}}$

In $x_0 = 0$ f NON cambia monotonia

$\Rightarrow$ $\boxed{x_0 = 0 \text{ non è né punto di massimo, né punto di minimo}}$

4) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^2 - x + 1}$

Dominio: $x^2 - x + 1 \neq 0$ $\quad \Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3 < 0$

$\longrightarrow x^2 - x + 1 \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \longrightarrow D = \mathbb{R}$.

Calcoliamo f':

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2-x+1) - (2x-1)(x^2-x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3 - x^2 - 2x^2 + x + 2x - 1 - (2x^3 - x^2 - 2x^2 + x - 2x + 1)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$= \frac{\cancel{2x^3} \cancel{- x^2} \cancel{- 2x^2} \cancel{+ x} + 2x - 1 \cancel{- 2x^3} \cancel{+ x^2} \cancel{+ 2x^2} \cancel{- x} + 2x - 1}{(x^2-x+1)^2}$$

$$= \frac{4x - 2}{(x^2-x+1)^2}$$

Quindi,

$f'(x) = 0 \longrightarrow \dfrac{4x-2}{(x^2-x+1)^2} = 0 \longrightarrow 4x - 2 = 0 \longrightarrow x = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

$\longrightarrow x = \frac{1}{2}$ punto critico

Ora,

$f'(x) > 0 \longrightarrow \dfrac{4x-2}{(x^2-x+1)^2} > 0$

N: $4x - 2 > 0 \longrightarrow x > \frac{1}{2}$

D: $(x^2-x+1)^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ (è un quadrato)

		1/2	
N	$-$		$+$
D	$+$		$+$
	$-$		$+$
	$\searrow$		$\nearrow$

In $x_0 = \frac{1}{2}$ f passa dall'essere decrescente all'essere crescente $\longrightarrow$ $\boxed{x_0 = \frac{1}{2} \text{ punto di minimo relativo}}$