2. Limiti di funzioni–Parte 1

Esercizio 1. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti (per sostituzione)

$$\lim_{x\to 0}(\sin(x)+\cos(x)), \qquad \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x^2-1}, \qquad \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x^2}} \qquad \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} \qquad \lim_{x\to +\infty}(x^2+x-10)$$

$$\lim_{x\to 1}\cos(\ln(x)) \qquad \lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x-2}{x}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{\sin(x)}{2x-\pi} \qquad \lim_{x\to 0}[\ln(\cos(x))+x^4] \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-}\sin(x)\cdot\tan(x)$$

Esercizio 2. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti sciogliendo le forme indeterminate $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^3-x^2+x}{x} \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{x^3-x^2+x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x-2} \qquad \lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x-4}{x+1} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-5x+4}$$

Esercizio 3. Determinare i valori dei parametri $a \in \mathbb{R}$ affinché le seguenti funzioni siano continue in $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\ln(x+e), & \text{se } x\geq 0,\\ \cos(x+2\pi), & \text{se } x<0.\end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x}, & \text{se } x\geq 1,\\ x^2+ax+1, & \text{se } x<1.\end{cases}$$

Esercizio 1

1) $\lim_{x\to 0} (\sin(x)+\cos(x)) = \underbrace{\sin(0)}_{0} + \underbrace{\cos(0)}_{1} = 0+1 = \boxed{1}$

2) $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(1^+)^2-1} = \frac{1}{1^+-1} = \frac{1}{0^+} = \boxed{+\infty}$

3) $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{(0^+)^2}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = \boxed{+\infty}$

l'esponenziale è una funzione continua

4) $\lim_{x\to 0^-} e^{1/x^2} = e^{\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{(0^-)^2}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = \boxed{+\infty}$

5) $\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}} = \boxed{+\infty}$ perché $\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$.

6) $\lim_{x\to +\infty} (x^2+x-10) = (+\infty)^2 + (+\infty) - 10 = +\infty+\infty-10 = \boxed{+\infty}$

7) $\lim_{x\to 1} \cos(\ln(x)) = \cos\left(\lim_{x\to 1} \ln(x)\right) = \cos(\underbrace{\ln(1)}_{0})$

il coseno è una funzione continua

il logaritmo è una funzione continua

$= \cos(0) = \boxed{1}.$

8) $\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = \sin\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\right) = \sin(+\infty)$ $\boxed{\text{non esiste}}$

il seno è una funzione continua

9) $\lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x} = \frac{1-2}{1} = \boxed{-1}$

10) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin(x)}{2x-\pi} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cancel{2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}}^+-\pi} = \frac{1}{\pi^+-\pi} = \frac{1}{0^+} = \boxed{+\infty}$

$\sin(\frac{\pi}{2})=1$

11) $\lim_{x\to 0} [\ln(\cos(x))+x^4] = \lim_{x\to 0} \ln(\cos(x)) + \lim_{x\to 0} x^4$

$= \ln\left(\lim_{x\to 0}\cos(x)\right) + \lim_{x\to 0} x^4 = \ln(\cos(0)) + 0 = \ln(1)+0$

$= 0+0 = \boxed{0}$

12) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sin(x) \cdot tg(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}^-\right) \cdot tg\left(\frac{\pi}{2}^-\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot tg\left(\frac{\pi}{2}^-\right)$

$= 1 \cdot (+\infty) = \boxed{+\infty}$

Esercizio 2

1) $\lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \frac{4^2-16}{4-4} = \frac{16-16}{4-4} = \frac{0}{0}$ F.I.

utilizzando la scomposizione $A^2-B^2 = (A+B)(A-B)$ si ha che

$$x^2-16 = (x+4)(x-4),$$

pertanto

$$\lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{(x+4)\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}} = \lim_{x \to 4} (x+4) = 4+4 = \boxed{8}$$

2) $\lim_{x \to 0} \frac{x^3-x^2+x}{x} = \frac{0}{0}$ F.I.

Raccogliamo x a numeratore:

$$x^3-x^2+x = x(x^2-x+1)$$

e pertanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3-x^2+x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}(x^2-x+1)}{\cancel{x}} = \lim_{x \to 0} (x^2-x+1) = 0-0+1 = \boxed{1}$$

3) $\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3-x^2+x}{x^2} = \frac{0}{0}$ F.I.

come nell'esercizio precedente raccogliamo x a numeratore:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^3-x^2+x}{x^2} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{x}(x^2-x+1)}{x^{\cancel{2}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2-x+1}{x}$$

$$= \frac{0^+ - 0^+ + 1}{0^+} = \frac{1}{0^+} = \boxed{+\infty}$$

4) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4x+4}{x-2} = \frac{4-8+4}{2-2} = \frac{0}{0}$ F.I.

Ricordiamo che se x_1, x_2 sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$, allora vale la scomposizione

$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2).$$

Calcoliamo il Δ del numeratore:

$$\Delta = (-4)^2 - 4\cdot 1 \cdot 4 = 16 - 16 = 0 \longrightarrow x_1 = x_2 = \frac{4}{2} = 2$$

Dunque,

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)(x-2) = (x-2)^2$$

e pertanto

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4x+4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^{\cancel{2}}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x\to 2}(x-2) = 2-2 = \boxed{0}$$

5) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2-3x-4}{x+1} = \frac{(-1)^2-3(-1)-4}{-1+1} = \frac{1+3-4}{-1+1} = \frac{0}{0}$ F.I.

Scomponiamo il numeratore:

$$\Delta = (-3)^2 - 4\cdot 1\cdot(-4) = 9+16 = 25$$

$$\longrightarrow x_{1,2} = \frac{3\pm 5}{2} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$$

Perciò

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-3x-4}{x+1} = \lim_{x\to -1}\frac{(x-4)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}} = \lim_{x\to -1}(x-4) = -1-4 = \boxed{-5}$$

6) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-5x+4} = \frac{1-1}{1-5+4} = \frac{0}{0}$ F.I.

Stavolta è il denominatore da scomporre:

$$\Delta = (-5)^2 - 4\cdot 1\cdot 4 = 25-16 = 9$$

$$x_{1,2} = \frac{5\pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow x^2 - 5x - 4 = (x-4)(x-1)$$

Quindi

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-5x+4} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{(x-4)\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-4} = \frac{1}{1-4} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

Esercizio 3

1) $$f(x) = \begin{cases} a \cdot \ln(x+e), & \text{se } x \geq 0 \\ \cos(x+2\pi), & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

La funzione è sicuramente continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ perché

- $\ln(x+e)$ è definito e continuo per $x > -e$,
- $\cos(x+2\pi)$ è definito e continuo in $\mathbb{R}$.

Studiamo la continuità in $x_0 = 0$:

$$f(0) = a \cdot \ln(0+e) = a \cdot \ln(e) = a \cdot 1 = a = \lim_{x \to 0^+} f(x).$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{x \to 0} \cos(x+2\pi) = \cos(2\pi) = 1.$$

Allora

$$f \text{ continua in } x_0 = 0 \iff \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$$

$$\iff \boxed{a = 1}$$

2) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x}, & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 + ax + 1, & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Sicuramente f è continua in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Per $x_0 = 1$ si ha:

$$f(1) = \frac{\ln(1)}{1} = \frac{0}{1} = 0 = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{x \to 1} (x^2 + ax + 1) = 1 + a + 1 = a + 2.$$

Allora,

$$f \text{ continua in } x_0 = 1 \iff a + 2 = 0 \iff \boxed{a = -2}$$