Compito del 21/01/2025

Corso di MATEMATICA per il Corso di Laurea Triennale in SCIENZE NATURALI E AMBIENTALI
Docente: Alessio Barbieri, **E-mail:** alessio.barbieri@unitus.it

Nome e Cognome: ....
Numero di Matricola: ....
Tempo: 3 ore. Non sono ammesse calcolatrici, appunti personali o libri. Riportare le risposte nel presente foglio negli appositi riquadri. Consegnare anche i fogli a protocollo.

Esercizio	D1	D2	E1	E2	E3	Σ
Voto						

Domanda 1. (3 punti) Indicare quale delle seguenti è la definizione di funzione continua in $x_0 \in I$ per $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

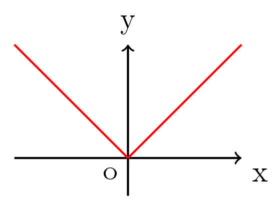
$\boxed{a}$ $\exists (a_n)_n \subseteq I \setminus \{x_0\}$ con $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ tale che $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$

$\boxed{b}$ $\forall (a_n)_n \subseteq I$ tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ si ha $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$

$\boxed{c}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - x_0| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$

$\boxed{d}$ $\forall (a_n)_n \subseteq I \setminus \{x_0\}$ tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ si ha $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$

Domanda 2. (3 punti) La funzione $f(x) = |x|$, il cui grafico è riportato qui sotto



è un esempio di funzione che soddifa una delle seguenti proprietà. Quale?

$\boxed{a}$ E' una funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$,
$\boxed{b}$ E' una funzione continua ma non derivabile in $\mathbb{R}$,
$\boxed{c}$ E' una funzione derivabile ma non continua in $\mathbb{R}$,
$\boxed{d}$ E' una funzione che non è né continua, né derivabile in $\mathbb{R}$.

Esercizio 1. (6 punti) Data la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, determinare l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa $x_0 = 5$.

Soluzione:

Esercizio 2. (10 punti) Risolvere il seguente problema di Cauchy, indicando l'intervallo di definizione della soluzione

$$\begin{cases} y' + y = x \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Soluzione:

Esercizio 3. (10 punti) Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 4}$$

determinarne: dominio, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, eventuali asintoti ed eventuali massimi e minimi. Tracciarne infine un grafico qualitativo qui sotto.

SOLUZIONI

Domanda 1. (3 punti) Indicare quale delle seguenti è la definizione di funzione continua in $x_0 \in I$ per $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$\boxed{a}$ $\exists (a_n)_n \subseteq I \setminus \{x_0\}$ con $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ tale che $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$

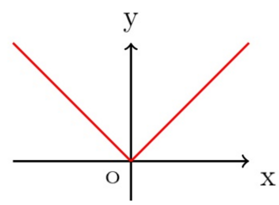
$\boxed{b}$ $\forall (a_n)_n \subseteq I$ tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ si ha $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$

$\boxed{c}$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - x_0| < \varepsilon\ \forall n \geq n_0$

$\boxed{d}$ $\forall (a_n)_n \subseteq I \setminus \{x_0\}$ tale che $\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ si ha $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$

N.B: $\boxed{d}$ è la definizione di $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, NON di continuità!

Domanda 2. (3 punti) La funzione $f(x) = |x|$, il cui grafico è riportato qui sotto



è un esempio di funzione che soddifa una delle seguenti proprietà. Quale?

$\boxed{a}$ E' una funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}$,
$\boxed{b}$ E' una funzione continua ma non derivabile in $\mathbb{R}$,
$\boxed{c}$ E' una funzione derivabile ma non continua in $\mathbb{R}$,
$\boxed{d}$ E' una funzione che non è né continua, né derivabile in $\mathbb{R}$.

(VEDI FILE "LEZIONI 8/9/10" A PAG 28)

Esercizio 1. (6 punti) Data la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, determinare l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto di ascissa $x_0 = 5$.

Soluzione: $y = \frac{5}{4}x - \frac{9}{4}$

Ricordiamo che la retta tangente a f in $x = x_0$ ha equazione

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Calcoliamo:

- $f(x_0) = f(5) = \sqrt{5^2 - 9} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$
- $f'(x) = \left[(x^2-9)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{\cancel{2}}(x^2-9)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \cancel{2}x = x(x^2-9)^{-\frac{1}{2}}$
  $= \frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$
- $f'(x_0) = f'(5) = \frac{5}{\sqrt{25-9}} = \frac{5}{4}$

Quindi l'equazione della retta tangente cercata è

$$y - 4 = \frac{5}{4}(x - 5) \longrightarrow y = \frac{5}{4}x - \frac{25}{4} + 4$$

$$\longrightarrow y = \frac{5}{4}x + \frac{-25+16}{4} \longrightarrow \boxed{y = \frac{5}{4}x - \frac{9}{4}}$$

Esercizio 2. (10 punti) Risolvere il seguente problema di Cauchy, indicando l'intervallo di definizione della soluzione

$$\begin{cases} y' + y = x \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

Soluzione: $\boxed{y(x) = x - 1 \qquad I = \mathbb{R}}$

Il problema di Cauchy assegnato ha un'equazione lineare del primo ordine del tipo

$$y' + a(x)y = b(x)$$

dove

- $a(x) = 1$ continua in $I = \mathbb{R}$,
- $b(x) = x$ continua in $I = \mathbb{R}$.

Perciò il problema assegnato ammette un'unica soluzione globale, cioè

$$y : I = \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Determiniamola. Risolviamo l'equazione applicando la formula risolutiva per equazioni del I ordine lineari:

$$y(x) = e^{-\int a(x)dx}\left[c + \int b(x) e^{\int a(x)dx}\right].$$

Qui

$$\int a(x)\,dx = \int 1 \cdot dx = \int dx = x$$

e quindi

$$\int b(x) e^{\int a(x)dx} = \int x e^x dx$$

Integriamo per parti:

$$f(x) = x \longrightarrow f'(x) = 1$$

$$g'(x) = e^x \longrightarrow g(x) = e^x$$

$$\int b(x) e^{\int a(x)dx} = \int \underbrace{x}_{f} \underbrace{e^x}_{g'} dx$$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x.$$

Allora l'integrale generale dell'equazione è

$$y(x) = e^{-x}\left[c + xe^x - e^x\right] = ce^{-x} + x - 1.$$

Imponiamo la condizione iniziale $y(0) = -1$:

$y(0) = -1 \longrightarrow c e^0 + 0 - 1 = -1 \longrightarrow c - 1 = -1 \longrightarrow c = 0.$

Allora la soluzione del problema di Cauchy è $y: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da

$$\boxed{y(x) = x - 1}.$$

Esercizio 3. (10 punti) Data la funzione

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 4}$$

determinarne: dominio, eventuali simmetrie, intersezioni con gli assi, segno, eventuali asintoti ed eventuali massimi e minimi. Tracciarne infine un grafico qualitativo qui sotto.

① DOMINIO: $x^2 + 4 \neq 0 \longrightarrow x^2 \neq -4 \quad \forall x \in \mathbb{R} \implies \boxed{D = \mathbb{R}}$

② SIMMETRIE: $f(-x) = \dfrac{e^{-x}}{(-x)^2 + 4} = \dfrac{e^{-x}}{x^2+4} \neq f(x), -f(x)$

$\implies f$ né pari, né dispari

③ INTERSEZIONI CON GLI ASSI:

□ asse y: $\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{e^x}{x^2+4} \end{cases} \longrightarrow y = \dfrac{e^0}{0+4} = \dfrac{1}{4}$

→ il punto di intersezione tra il grafico di f e l'asse y è $(0, \frac{1}{4})$

□ asse x: $\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{e^x}{x^2+4} \end{cases} \longrightarrow \cancel{(x^2+4)} \cdot \dfrac{e^x}{\cancel{x^2+4}} = \underbrace{0 \cdot (x^2+4)}_{0}$

$\longrightarrow e^x = 0 \quad \nexists x \in \mathbb{R} \longrightarrow$ nessuna intersezione con l'asse x

④ SEGNO:

$f(x) > 0 \longrightarrow \dfrac{e^x}{x^2+4} > 0$

N: $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D: $x^2 + 4 > 0 \longrightarrow x^2 > -4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\implies f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

⑤ ASINTOTI.

- verticali: nessuno, perché $D=\mathbb{R}$.
- orizzontali:

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+4} = \frac{+\infty}{+\infty}$ F.I.

Poiché $e^x >> x^2+4$ per $x\to+\infty$, dalla gerarchia degli infiniti
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+4} = +\infty \Longrightarrow$ non ci sono asintoti orizzontali per $x\to+\infty$

• $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2+4} = \frac{e^{-\infty}}{+\infty+4} = \frac{0}{+\infty} = 0$

$\Longrightarrow y=0$ asintoto orizzontale per $x\to-\infty$.

- obliqui (solo per $x\to+\infty$):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+4}\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x(x^2+4)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3+4x}$$
$$= \frac{+\infty}{+\infty} \text{ F.I.}$$

Poiché $e^x >> x^3+4x$ per $x\to+\infty$, dalla gerarchia degli infiniti
$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3+4x} = +\infty \Longrightarrow$ non ci sono asintoti obliqui.

⑥ MASSIMI E MINIMI: $f(x) = \frac{e^x}{x^2+4}$

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+4) - e^x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{e^x(x^2-2x+4)}{(x^2+4)^2}$$

Cerchiamo i punti critici:

$$f'(x)=0 \longrightarrow \frac{e^x(x^2-2x+4)}{(x^2+4)^2} = 0 \longrightarrow \cancel{(x^2+4)^2}\,\frac{e^x(x^2-2x+4)}{\cancel{(x^2+4)^2}} = 0$$

$$\longrightarrow \underbrace{e^x}_{\neq 0\ \forall x}(x^2-2x+4) = 0 \longrightarrow x^2-2x+4=0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4\cdot1\cdot4 = 4-16<0$$

$$\longrightarrow \nexists x\in\mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ f non ha punti critici

Studiamo comunque il segno di f' per capire la crescenza.

$$\frac{e^x(x^2-2x+4)}{(x^2+4)^2} > 0$$

- $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $x^2-2x+4 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ perché $\Delta < 0$
- $(x^2+4)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ crescente in $\mathbb{R}$

e non ha alcun punto di minimo o massimo.